Methoden

zur

Berechnung von Volkssterbetafeln

Inauguraldissertation

der philosophischen Fakultät II der Universität Bern
zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Arthur Linder
von Reichenbach

Bern
Buchdruckerei Hans Schenk
1934

Methoden

zur

Berechnung von Volkssterbetafeln

Inauguraldissertation

der philosophischen Fakultät II der Universität Bern
zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Arthur Linder
von Reichenbach.

Bern
Buchdruckerei Hans Schenk
1934

Auf Antrag von Herrn Professor *Friedli* von der philosophischen Fakultät II angenommen.

Bern, den 19. Juli 1934.

Der Dekan:
Prof. Crelier.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Die vorliegende Arbeit erscheint im Verlag
der
Buchdruckerei Hans Schenk in Bern separat im Buchhandel.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung 5

A. Theoretischer Teil 10

I. Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit ohne Berücksichtigung des Zu- und Wegzugs 10

1. Im 17. Jahrhundert 10
2. Im 18. Jahrhundert 13
3. Im 19. Jahrhundert 27

II. Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit unter dem Einfluss des Zu- und Wegzugs 39

III. Neue Art der Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit unter dem Einfluss des Zu- und Wegzugs nach der diskontinuierlichen Methode. 61

IV. Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit unter dem Einfluss der Wanderungen nach der Methode von Insolera 67

V. Berechnung der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeit bei mehrjährigen Beobachtungsperioden 72

B. Praktischer Teil 76

I. Die Berechnungsweise der schweizerischen Volkssterbetafeln . . . 76

II. Die Sterbetafeln für die Städte Basel, Bern und Zürich 82

III. Vorschläge für die Berechnung neuer schweizerischer Volkssterbetafeln 83

Schlusswort 85

Literaturverzeichnis 86

Auf das Literaturverzeichnis wird durch eingeklammerte Zahlen [·] verwiesen.

Den Herren Professoren *Crelier*, *Gonseth*, *Greinacher*, *Gruner*, *Moser* und *Sganzini* bin ich für die während meines Studiums erhaltenen Anregungen zu grossem Dank verpflichtet.

Besondern Dank schulde ich Herrn Prof. Dr. *W. Friedli*, der die vorliegende Arbeit angeregt und ihr Fortschreiten mit vielen wertvollen Ratschlägen unterstützt hat.

A. L.

Einleitung.

Ein Vergleich der Sterblichkeit zwischen Stadt und Land, zwischen Städten, zwischen Landesteilen oder Ländern birgt erhebliche Schwierigkeiten in sich. Die gleichen Schwierigkeiten treten auf bei zeitlichen Vergleichen oder beim Vergleich der Sterblichkeit von nach sachlichen Merkmalen unterschiedenen Bevölkerungsteilen (Männer - Frauen, Arme - Reiche, Angehörige verschiedener Zivilstände und Berufe) und beim Vergleich der Sterblichkeit an den verschiedenen Todesursachen.

Das einfachste Verfahren zum Vergleich der Sterblichkeit zweier durch örtliche, zeitliche oder sachliche Merkmale unterschiedener Bevölkerungen besteht darin, die Zahl der Sterbefälle auf die Einwohnerzahl zu beziehen, d. h. die Sterbeziffer zu berechnen. Die Sterbeziffer ist indessen zu Vergleichszwecken nur mit Vorbehalten verwendbar. Dies erkennt man durch folgende Ueberlegung recht gut. Die Gesamtsterbeziffer ist das mit den Beständen der Altersgruppen gewogene Mittel der Altersterbeziffern. Denken wir uns beispielsweise die Bevölkerung in die Altersklassen von 0 — 9, 10 — 19, 20 — 29, 30 — 39 Jahren usw. eingeteilt und in gleicher Weise die Zahl der Sterbefälle, so hat man

$l_1, l_2 \ldots\ldots\ldots l_{10}$ Einwohner in den Altersgruppen 1, 2, . . . 10

$d_1, d_2 \ldots\ldots\ldots d_{10}$ Sterbefälle von Personen der Gruppen 1, 2, . . . 10

$s_1 = \frac{d_1}{l_1}, s_2 = \frac{d_2}{l_2} \ldots\ldots s_{10} = \frac{d_{10}}{l_{10}}$ Sterbeziffern der Gruppen 1, 2, . . . 10

$$s = \frac{d}{l} = \frac{\sum_1^{10} d_i}{\sum_1^{10} l_i} = \frac{\sum_1^{10} l_i \frac{d_i}{l_i}}{\sum_1^{10} l_i} = \frac{\sum_1^{10} l_i s_i}{\sum_1^{10} l_i}$$

Bei gleichen Altersspezifischen fällt die Gesamtsterbeziffer verschieden aus, wenn die Altersverteilung der Vergleichsbevölkerungen verschieden ist. Die Gesamtsterbeziffer ist also zum Vergleich der Sterblichkeit zweier Bevölkerungen nur geeignet bei gleicher Altersstruktur.

Wie eignen sich dazu die Sterbeziffern von Altersgruppen? Diese Frage ist dahin zu beantworten, dass hier der gleiche Einwand gilt wie für die Gesamtsterbeziffer, insofern auch die Sterbeziffern für Altersgruppen noch als gewogenes Mittel der Sterbeziffern für einzelne Altersjahre angesehen werden können.

Unsere Betrachtung führt also dazu, bei Sterblichkeitsvergleichungen von Sterbeziffern für einzelne Altersjahre auszugehen. Daraus ergibt sich aber eine erheblich umständlichere Vergleichung, da einander nunmehr statt zweier Zahlen zweimal 80 bis 100 Zahlen gegenüberstehen. Diese Schwierigkeit wird durch die Berechnung von Standardsterbeziffern umgangen.

Ein wichtiger Einwand gegen den Vergleich mittels Sterbeziffern ist nun aber der, dass die Sterbeziffer eine Zahl ist, die in verschiedener Weise aufgefasst werden kann. Die Sterbeziffer kann beispielsweise erklärt werden als die Zahl der Sterbefälle eines Jahres zwischen zwei bestimmten Altersgrenzen, dividiert durch die Zahl der Bewohner zwischen diesen Altersgrenzen in der Mitte des Jahres. Man kann aber ebensogut die Zahl der Einwohner des betreffenden Alters auf Jahresanfang, oder auf Jahresende, oder das Mittel zwischen Anfangs- und Endbestand annehmen.

Diesem Uebelstand kann abgeholfen werden durch die Berechnung der *Sterbenswahrscheinlichkeit*, die definiert ist als die Zahl der Sterbefälle einer Anzahl gleichaltriger Personen in einem bestimmten Altersintervall dividiert durch den Bestand dieser gleichaltrigen Personen zu Beginn des Intervalls. Die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit eignet sich infolge ihrer klaren und scharfen Definition besser zu Vergleichen als die Sterbeziffer. Als *Sterbetafel* wird die Tafel der Sterbenswahrscheinlichkeiten bezeichnet.

In natürlicher Erweiterung des Gedankens, der zur Berechnung der Sterbenswahrscheinlichkeiten führt, kann man sich ein Bild der Sterblichkeit in einer Bevölkerung machen, indem man

von einem Bestand von 10 000 oder 100 000 Neugeborenen ausgeht und berechnet, wieviele in jedem Alter noch vorhanden sind. Bezeichnet q_x die Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen, im Verlaufe des nächsten Jahres zu sterben und l_x die Zahl der x-jährigen Personen, so ist

$$l_x = l_o \prod_{i=o}^{x-1} (1-q_i) .$$

Hat man auf diese Art die *Ueberlebungsordnung* berechnet, so kann man aus ihr rückwärts die Sterbenswahrscheinlichkeiten bestimmen mittels der Beziehung

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

Die Absterbeordnung kann zum Vergleich der Sterblichkeit in zwei Bevölkerungen gut verwendet werden, weil sie einen zusammenfassenden, vom Altersaufbau unabhängigen Ausdruck der Sterblichkeit gibt. Aus den Zahlen der Absterbeordnung lassen sich ferner in bekannter Weise die Werte der *mittleren Lebensdauer* berechnen, die den einfachsten Ausdruck für die unterschiedliche Sterblichkeit von Bevölkerungen darstellt, der vom Altersaufbau nicht beeinflusst ist.

Aus den Darlegungen über den Zweck ergibt sich ohne weiteres auch der Wert der Berechnung von Sterbetafeln. Die Berechnung von Sterbenswahrscheinlichkeiten und von Sterbetafeln ist notwendig zur Gewinnung *vergleichbarer* Angaben über die Sterblichkeit.

Die Anwendungen der Sterbetafeln sind mannigfacher Art. In der Bevölkerungsstatistik sind sie unerlässlich zur Beurteilung der Fortschritte der Gesundheitspflege, zur Feststellung der jeweiligen Tendenz der Bevölkerungsentwicklung (in Verbindung mit Angaben über die Fruchtbarkeit) und zu Vorausberechnungen über die mutmassliche Entwicklung der Bevölkerungszahl.

Die Sterbetafeln sind aber auch von grundlegender Bedeutung für die Lebensversicherungsrechnung. Den Volkssterbetafeln kommt dabei nach einem Worte von Prof. *Moser* [1] „die wichtige Aufgabe zu, als Kompass zu dienen". Sie zeigen

uns, ob die Sterbetafeln, mit denen die Versicherungsgesellschaften rechnen, mit der Entwicklung der Volkssterblichkeit im Einklang stehen oder nicht.

Abschliessend muss noch erwähnt werden, dass der für die Sterbetafeln massgebende Leitgedanke auch in andern Gebieten der Bevölkerungsstatistik ein reiches Anwendungsgebiet findet, bei der Berechnung von Heiratstafeln, Scheidungstafeln, Tafeln der ehelichen Fruchtbarkeit, um nur einige der wichtigsten zu nennen.

Auch ausserhalb der Bevölkerungsstatistik wird der Begriff der Sterbetafel oft verwendet [2], wofür hier ebenfalls einige Beispiele genannt seien:

Tafeln für die Brenndauer von Glühlampen
" " " Lebensdauer von Aktiengesellschaften
" " " Mietdauer bei Wohnungen
" " " Gebrauchsdauer von Autoreifen.

Der Gedanke der Sterbetafel reicht also überallhin, wo Bestände mit bestimmter Altersstruktur vorkommen, die sich durch Hinzukommen neuer Elemente und durch Ausscheiden verschieden alter Elemente fortdauernd verändern. Hauptsächliche Forderung ist die Möglichkeit, die Ursache des Ausscheidens isolieren zu können, um damit die Berechnungsgrundlagen der Beobachtung zugänglich zu machen.

Endlich darf noch kurz auf den theoretischen Wert des Begriffs der Ausscheidungswahrscheinlichkeiten und der Abgangsordnung hingewiesen werden, wie dies von Prof. *Friedli* in seiner Arbeit „Intensität und Zivilstand" [3] ausführlich dargelegt wird.

Die vorliegende Arbeit hat zum Zweck, die verschiedenen bisher benützten Methoden zur Berechnung von Volkssterbetafeln zu besprechen. Im Anschluss an die von *Insolera* für die Korrektur der Wanderungsstörungen vorgeschlagene Rechnungsart wird eine zu praktischen Zwecken geeignete Formel abgeleitet, die vor allem für die Berechnung von städtischen Volkssterbetafeln angewandt werden kann. Im praktischen Teil sind die Methoden der bisherigen schweizerischen Volkssterbetafeln im Zusammenhang erläutert. Den Abschluss bilden Vorschläge für die Berechnung zukünftiger schweizerischer Volkssterbetafeln.

Es hätte zu weit geführt, in dieser Arbeit auch auf das wichtige Problem der Ausgleichung einzutreten. Wir verweisen diesbezüglich auf eine Arbeit von *Johanna Simonett*, in der die Zweckmässigkeit der Methode von King bei der Ausgleichung von Sterbenswahrscheinlichkeiten dargetan wird [4].

A. Theoretischer Teil.

I. Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit ohne Berücksichtigung des Zu- und Wegzugs.

1. Im 17. Jahrhundert.

Der erste, der versucht hat, sich über den Verlauf des Absterbens ein zahlenmässiges Bild zu machen, scheint der Engländer *John Graunt* (1620-1674) gewesen zu sein. Er gibt folgende Zahlen:

„Of a hundred there die within the first six years 36
The next ten years or Decad 24
The second Decad 15
The third Decad 9
The fourth 6
The next 4
The next 3
The next 2
The next . . . . . 1."

Sodann berechnet er die Zahl der Ueberlebenden und zwar genau in der Art wie es heute gemacht wird, indem er die Zahl der Geborenen gleich 100 setzt.

„From whence it follows that of the said 100 conceived, there remain alive at six years end 64.

At sixteen years end 40
At twenty six 25
At thirty six 16
At fourty six 10
At fifty six 6
At sixty six 3
At seventy six 1
At eighty six . . . . . 0."

Die Zahlen von Graunt sind Ergebnisse von Schätzungen. Nur für die ersten sechs Jahre scheint er Beobachtungen zur Verfügung gehabt zu haben.

Einen zweiten Beitrag zur Berechnung der Absterbeordnung lieferte der berühmte englische Astronom *Edmund Halley* (1656-1742).

Zwar hatte schon vorher ein Holländer, *Van Dael*, angeblich aus eigenen Beobachtungen Angaben für das Aussterben einer bestimmten Zahl von Neugeborenen gemacht. Ebenso hatte sich

der berühmte *Christian Huygens* (1629 — 1695) in einer Korrespondenz mit seinem Bruder *Lodewigk* ebenfalls mit ähnlichen Fragen befasst. Auch *Johan de Witt* (1625 — 1672) hat über das Absterben zahlenmässige Angaben gemacht, die jedoch lediglich Annahmen darstellen.

Aber erst bei *Halley* verdichten sich die Angaben über die Sterblichkeit zu einem eigentlichen Verfahren, mit dessen Hilfe ein gewisser Ueberblick über das Sterben in den verschiedenen Altern gewonnen werden kann [5].

Kaspar Neumann hatte aus Geburts- und Sterbelisten der Stadt Breslau Materialien zusammengestellt, um gewisse im Volke bestehende abergläubische Vorstellungen zu bekämpfen. Man glaubte beispielsweise, dass das 49. und das 63. Altersjahr besonders gefährlich seien. *Leibniz* wurde auf die statistischen Zusammenstellungen Neumanns aufmerksam und sandte dieselben an die Royal Society in London. So kam Halley in den Besitz der Zahlen. Er berechnete aus diesen Zahlen seine Absterbeordnung. Die Angaben über die Sterbefälle beziehen sich auf die Jahre 1687 — 91. Die Art, nach der Halley seine Sterbetafel berechnete, ist in seiner Abhandlung in den Philosophical Transactions nicht eindeutig dargestellt. Die Tafel von Halley besteht aus zwei Kolonnen. Die eine stellt das laufende Alter (age current), die andere die zugehörige Personenzahl dar. Die Tafel beginnt mit dem Alter 1 und 1000 Personen, und schreitet in einjährigen Stufen bis zum Alter 84 mit 20 Personen fort.

Ueber die Halleysche Berechnungsweise besteht keine Einigkeit. Nur in einem Punkte sind sich scheinbar alle Kommentatoren einig, dass nämlich die erste Zahl 1000 nicht etwa auf willkürlicher Setzung beruht wie bei den heutigen Sterbetafeln und wie schon bei Graunt. Aber wie diese erste Eintragung berechnet wurde, darüber bestehen verschiedene Mutmassungen.

Nach *Farr* hätte Halley die Zahl 1000 so erhalten, dass er von den 1238 jährlich Geborenen die 348 im Alter von unter einem Jahr Verstorbenen abzieht und den Durchschnitt

$$\frac{1238 + 890}{2} = 1064$$

auf 1000 abrundet. Dieser Vermutung schliesst sich auch *Kinkelin* [6] an.

Anders argumentiert *Westergaard*, aus dessen Geschichte der Statistik [7] wir viele interessante Einzelheiten erfuhren. Nach Westergaard wusste Halley, dass von den 1218 Geborenen des Jahres 1691 226 vor Neujahr starben, sodass zu diesem Zeitpunkt noch 992 lebten. Eine Zählung hätte also am Neujahrstage (aufgerundet) 1000 im Alter von weniger als einem Jahr lebende Kinder ergeben.

Ebenso unklar ist die Rechnung der Ueberlebenden bis zum Alter 6. Von dort an scheint überhaupt die Ueberlebensordnung mit der Tafel der Verstorbenen nicht mehr in direkter Beziehung zu stehen, sondern eher auf Schätzungen zu beruhen. Immerhin scheinen sich die Zahlen nicht stark von den tatsächlichen Verhältnissen zu entfernen.

Die Zahlen der Halleyschen Tabelle bedeuten auf jeden Fall nicht gleichaltrige Personen, wie dies bei unsern Absterbeordnungen der Fall ist, sondern gleichzeitig Lebende, d. h. die an einem bestimmten Zeitpunkt zwischen zwei Altersgrenzen lebenden Personen. Nur so ist zu verstehen, dass er die Zahlen zusammenzählt und damit die gesamte Einwohnerzahl von Breslau, nämlich 34 000 Bewohner, erhält. Von diesem Standpunkte aus gewinnt die Westergaardsche Annahme über die Berechnung der Zahlen der Halleyschen Tafel an Wahrscheinlichkeit.

Pflichtet man der Auffassung von Westergaard bei, und dies scheint uns geboten, so hat also Halley bereits in theoretisch einwandfreier Weise die Zahl der im Alter zwischen Null und einem Jahr stehenden Personen berechnet.

Unabhängig von der eben erwähnten Berechnung der Absterbeordnung Gleichzeitiger hat Halley auch angegeben, wie von der mittleren Zahl der Geborenen die mittlere Zahl der 0 bis 1 jährig Gestorbenen abzuziehen ist, um zu finden, wieviele der Geborenen das Alter 1 erreichen. Weiter zählt er von den letztern die ein- bis sechsjährig Verstorbenen ab, um die das Alter 6 erreichenden Personen zu berechnen. Dieses Verfahren gibt nur dann die Absterbeordnung Gleichaltriger, wenn man annehmen darf, dass die Sterblichkeit in den ent-

sprechenden Kalenderjahren und Altersabschnitten für jeden Geburtenjahrgang gleich gross ist.

Weiter berechnet Halley die wahrscheinliche Lebensdauer, indem er aus der Tafel abliest, wann noch die Hälfte der Lebnden eines bestimmten Alters übrigbleibt.

Zusammenfassend sei festgestellt, dass bei Graunt und Halley die ersten Zahlenreihen vorliegen, die über die Sterblichkeit nach dem Alter ein in groben Zügen zutreffendes Bild vermitteln. Das Verfahren zur Gewinnung theoretisch sinnvoller Sterbetafeln musste indes erst von spätern Forschern gefunden werden.

2. Im 18. Jahrhundert.

Die im 18. Jahrhundert vorgenommenen Untersuchungen über die Sterbetafeln sind aus zwei Gründen fruchtbar geworden. Einmal wurden die Beobachtungen immer systematischer durchgeführt und das Material immer eifriger gesammelt und zusammengestellt. Die zweite wichtige Erscheinung ist die Mitarbeit bedeutender Mathematiker an den Problemen der Sterblichkeitmessung, ich nenne hier nur Euler, Daniel Bernoulli und Lambert.

Als erster Schriftsteller des achzehnten Jahrhunderts sei der Holländer *Willem Kersseboom* (1691 — 1771) genannt. Zur Berechnung der Sterbetafel ging Kersseboom folgendermassen vor: Auf Grund von Geburtsregistern und Schätzungen ermittelte er für Holland und Westfriesland eine durchschnittliche jährliche Geburtenzahl von 28 000. Aus den Sterberegistern der Gemeinden findet er, dass von diesen 28 000 jeweils 5500 im ersten Lebensjahre sterben. Für die Berechnung der Sterblichkeit in den höhern Altersklassen benützt er Leibrentenmaterial. Aus diesem Material entnimmt er, wieviele Rentenbezüger beim Bezugsbeginn ein-, zwei-, dreijährig usw. waren und wieviele mit der Zeit davon wegstarben. Aus der Anzahl Lebender in Verbindung mit den davon Gestorbenen verfolgt er das Absterben nach einjährigen Altersklassen. Die Absterbeordnung reduziert Kersseboom auf den 20. Teil der in Holland und Westfriesland Geborenen und beginnt sie somit mit 1400 Geborenen.

Kersseboom gibt auch an, wie man für die Einwohner einer Stadt eine Sterbetafel berechnen müsste. Er schlägt vor, die in bestimmten Altersklassen Lebenden zu beobachten und nachzusehen, wie dieselben im Verlaufe der Zeit absterben. Er scheint somit der erste zu sein, der sich bewusst ist, dass nur bei Beziehung der zwischen zwei Altersgrenzen erfolgten Sterbefälle auf die entsprechenden Lebenden richtige Sterbetafeln zu erwarten sind.

Neben dieser grundsätzlich richtigen Erkenntnis ist bei Kersseboom noch eine zweite bedeutsame Entdeckung zu finden. Er berechnet nämlich aus den nach Altersklassen angegebenen Sterbefällen in London für die Jahre 1728-1737 eine Sterbetafel, indem er annimmt, dass die Geburtenzahlen für eine lange Reihe von Jahren stets gleich gross gewesen seien, und dass alle dem gleichen Sterbegesetz unterworfen waren. Es ist dies die später vielfach fälschlich als Halleysche Methode bezeichnete Methode zur Berechnung der Absterbeordnung für eine stationäre Bevölkerung.

Kersseboom berechnet in richtiger Weise die mittlere Lebenserwartung, indem er die von den aus der Ueberlebensordnung hervorgehenden Gleichaltrigen verlebte Zeit durch ihre Anzahl dividiert.

Ein anderer Holländer, *Struyck* (1687-1769) beschäftigte sich besonders auch mit der unterschiedlichen Sterblichkeit der männlichen und weiblichen Personen. Er ging dabei wie Kersseboom von durchaus richtigen Grundsätzen aus. Wie dieser benützte er Angaben über ganze Bevölkerungen und Rentner.

In Schweden wurde ums Jahr 1748 gesetzlich das sogenannte Tabellenwerk eingeführt, Aufzeichnungen in sämtlichen Verwaltungsbezirken des Landes über Geburten und Sterbefälle. Zuerst wurde die Geistlichkeit, später die Gemeindebehörden mit den Aufzeichnungen beauftragt.

Die Bearbeitung dieser Erhebungen lag zuerst in den Händen von *Pehr Elvius* (1710-1749), später in denjenigen von *Per Wargentin* (1717-1783). Die Todesfälle des Jahres 1749 verteilt Wargentin auf die Altersklassen und berechnet die

Promilleziffern. Durch Kombination mit den Tafeln von Halley, Kersseboom und Deparcieux berechnet er eine neue Sterbetafel, für die er allgemeine Gültigkeit annimmt.

Die beachtlichste Leistung von Wargentin ist die Berechnung einer Sterbetafel, die sich auf die Sterbefälle der Jahre 1755-1763 bezieht. Es ist dies die erste *Volks*sterbetafel, die durch Vergleich der Sterbefälle mit den Lebenden berechnet wurde. Da Wargentin nicht theoretisch veranlagt war, hat er die Untersuchungen über die Sterblichkeit nicht weiter getrieben. Als wichtigstes Ergebnis seiner Untersuchungen über Volkssterbetafeln betrachtet Westergaard die Erkenntnis, dass die Sterblichkeit der weiblichen Einwohner kleiner ist als die der männlichen.

In Frankreich berechnete *Deparcieux* (1703-1768) eine Sterbetafel. Er berechnet in ähnlicher Weise wie Kersseboom und ebenfalls anhand von Tontinenmaterial die von einer bestimmten Zahl Nulljähriger in jeder Altersklasse Verstorbenen, die Zahl der Ueberlebenden und die mittlere Lebenserwartung für jedes Alter. Die Berechnungsmethode gibt er in theoretisch gefassten Sätzen wieder. Er geht in dieser Hinsicht über Wargentin und seine andern Zeitgenossen hinaus. Auch ist er sich bewusst, dass die Sterblichkeit der Tontiniten kleiner sein wird als die der Gesamtbevölkerung und daher auch für diese Sterblichkeitstafeln berechnet werden sollten.

J. P. Süssmilch (1707 — 1767) ist wohl der bekannteste statistische Schriftsteller seiner Zeit. In seinem Buche, „Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen" [8], sammelt er alles ihm zur Verfügung stehende statistische Zahlenmaterial. Er gibt darin als selbständige Beiträge die Promillezahlen der Verstorbenen nach Altersklassen in Wien 1728, 1732, 1738 und 1739, in Breslau 1722 — 24, in London 1730 — 39. Durch Zusammensetzung früherer Tafeln berechnet Süssmilch eine Absterbeordnung für ländliche und eine für städtische Bevölkerungen. Süssmilch ist vorwiegend Sammler von statistischem Material. Theoretisches Wissen und Können fehlen ihm. Dies zeigt sich z. B. auch darin, dass er im unklaren ist über die verschiedene Bedeutung der wahrschein-

lichen Lebensdauer und der mittleren Lebenserwartung. Dagegen betont er die Bedingtheit des Verfahrens zur Berechnung von Tafeln für stationäre Bevölkerungen.

In der Schweiz stellte *Muret* 1766 eine Sterbetafel auf, allerdings nur, indem er die Promillezahlen der Verstorbenen nach Altersgruppen berechnet.

Wichtige Beiträge zur Theorie der Sterbetafeln gaben die drei grossen Schweizer Mathematiker Euler, Daniel Bernoulli und Lambert.

Leonhard Euler (1707 — 83) zeigte 1767 wie bei Annahme einer geometrisch zunehmenden Bevölkerung die Berechnung der Sterbenswahrscheinlichkeiten einzelner Jahre richtig durchgeführt werden kann, auch wenn man nur die Zahlen über die Verstorbenen besitzt.

Von *Daniel Bernoulli* (1700 — 1782) erschien 1766 ein „Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et les avantages de l'inoculation pour la prévenir" [9]. In dieser Arbeit ist zum erstenmal ein Problem der Mortalitätsstatistik mit Hilfe der Infinitesimalrechnung der Lösung näher gebracht werden.

Daniel Bernoulli stellt sich als Aufgabe, zu berechnen, wieviele Personen mehr am Leben bleiben, wenn die Blattern nicht wirken würden. Ohne sich auf zahlenmässige Beobachtungen stützen zu können, nimmt er aus seinen persönlichen Warnehmungen heraus an, dass im Verlaufe des Jahres von n Personen gleichgültig welchen Alters, und die bis dahin von den Blattern verschont blieben, eine an Blattern erkrankt. Von m Erkrankten stirbt im gleichen Intervall eine. Um nun seine Berechnungen anstellen zu können, nimmt er als Gesamtsterblichkeit die Sterblichkeit an, die sich aus der Halleyschen Tafel ergibt.

Bernoulli bezeichnet mit ξ die Ueberlebenden vom Alter x und mit s die Zahl der Personen desselben Alters, die die Blattern bis dahin nicht gehabt haben. Die Abnahme dieser Zahl im unendlich kleinen Zeit- (Alters-) element dx ist $-ds$. Sie ist gleich der Zahl derjenigen, die im Intervall dx an den Blattern erkranken, und das sind

$$\frac{s \cdot dx}{n}$$

In dieser Zahl sind auch diejenigen inbegriffen, die in diesem Zeitintervall an Blattern sterben. Um ds zu erhalten, muss aber noch die Zahl jener bestimmt werden, die im bewussten Zeitelement an den übrigen Todesursachen sterben. Von allen ξ Ueberlebenden sterben insgesamt $d\xi$ und an den Blattern sterben davon

$$\frac{s \cdot dx}{n \cdot m}$$

Von den ξ Ueberlebenden sterben also

$$- d\xi - \frac{s \cdot dx}{n \cdot m}$$

an allen übrigen Todesursachen. Von den s noch nicht von den Blattern befallenen Personen werden somit

$$\frac{s \cdot d\xi}{\xi} - \frac{s \cdot s \cdot dx}{\xi \cdot n \cdot m}$$

an andern Todesursachen sterben. Endgültig erhält Bernoulli

$$- ds = \frac{s \cdot dx}{n} - \frac{s \cdot d\xi}{\xi} - \frac{s \cdot s \cdot dx}{m \cdot n \cdot \xi} .$$

Zu dieser Gleichung bemerkt Bernoulli unter anderm: „On voit aussi que j'entends proprement par

$$\frac{1}{n} \text{ et } \frac{1}{m}$$

l'intensité des périls à prendre la petite vérole pour ceux qui ne l'ont pas encore eu, et à en mourir lorsque on en est attaqué, en supposant ceux qui l'ont eu une fois hors de péril de la reprendre". Aus den bisherigen Ausführungen geht indessen hervor, dass es sich hier nicht um die Entdeckung und Anwendung dessen handelt, was man heutzutage Sterblichkeits- oder Erkrankungsintensität nennt. Die Bemerkung Westergaards, dass sich Bernoulli bei seiner Rechnung der Sterblichkeitsintensität (force or intensity of mortality) bediene, ist nicht genau.

Bernoulli integriert die oben entwickelte Differentialgleichung und bestimmt die Konstante durch die Annahme, dass bei

$$x = o, \; s = \xi \cdot$$

Er erhält

$$s = \frac{m}{(m-1)\, e^{\frac{x}{n}} + 1} \cdot \xi$$

Bernoulli setzt endlich $m = n = 8$. Er ist nun imstande, die Zahl der von den Blattern nicht betroffenen aus der Halleyschen Tafel mit Hilfe dieser Formel für jedes Alter zu berechnen, womit für ihn das Problem prinzipiell erledigt ist.

Der dritte im Bunde, *J. H. Lambert*[1]) (1728—1777) ist einer der grössten Theoretiker der Bevölkerungsstatistik im 18. Jahrhundert. Da seine Leistungen weder von Knapp noch von Westergaard ausführlich dargestellt werden, sei hier einiges nachgeholt.

Lambert widmet drei Abschnitte seines berühmten Werkes „Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung" [10] statistischen Dingen. Im ersten Band, S. 424 — 488 findet sich seine „Theorie der Zuverlässigkeit der Beobachtungen und Versuche", in welcher man den ersten Versuch einer *Fehlertheorie* zu erblicken hat. Darin stellt sich Lambert auch die Aufgabe der *Ausgleichung* von Beobachtungen, die er analytisch und im Beispiel der Ueberlebenskurve auch graphisch löst. Nach *Loewy* [11] ist Lambert der erste, der die graphische Darstellung funktioneller Abhängigkeiten systematisch benützt, und vor allem auch der erste, der eine Kurve der Ueberlebenden aufgezeichnet hat.

Der zweite Beitrag handelt vom *„Einschalten"* (Bd. III, S. 66 — 104). Lambert behandelt hier das Gebiet der Interpolation.

Der dritte Beitrag zur Statistik findet sich auf den Seiten 476 — 569 des dritten Bandes und betrifft „Anmerkungen über die *Sterblichkeit, Totenlisten, Geburten und Ehen*". Diese Anmerkungen bestehen aus folgenden sieben Teilen:

1. Ueber die Tabellen der Sterblichkeit,
2. Die Trennung der Ehen durch den Tod,
3. Bestimmung der stehenden Ehen, lebenden Witwer und Witwen aus den Sterberegistern,
4. Die Anzahl der zweiten und folgenden Ehen,
5. Die Anzahl der Kinder aus jeden Ehen,
6. Die Ehen mit dem Alter beider Personen verglichen,
7. Die Tödlichkeit der Kinderblattern.

---

[1]) Mühlhausen stand zur Zeit Lamberts im Schirm der reformierten Orte der Eidgenossenschaft. Die Mülhausener galten bis 1798 als Schweizer; so auch Lambert, der vielfach als der „Muelhusio-Helvetus" bezeichnet wird.

Jede dieser sieben Abhandlungen ist für die Geschichte der Bevölkerungsstatistik gleich wichtig. Es würde indessen den Rahmen dieser Arbeit überschreiten, wenn ich auf alle im einzelnen eingehen wollte. Uns interessieren hier nur die erste und die letzte Abhandlung.

Die Abhandlung „Ueber die Tabellen der Sterblichkeit" enthält im wesentlichen folgendes: Das Problem der Sterblichkeitsmessung besteht darin, zu bestimmen, *„wie viel jährlich von einer gewissen Anzahl Menschen überhaupt, oder von gegebenem Alter, Geschlecht, Stande, Lebensart, Wohnort etc. sterben"*. Und die Lösung der Aufgabe, die sich als erste darbietet, ist, „dass man jedes Jahr die Lebenden aufzeichne, und dann auch abzähle, wie viele davon jedes Jahr gestorben sind. Doch sind die Schwierigkeiten dieser direkten Bestimmung der Sterblichkeit wohl unüberwindlich".

Beim Stande der damaligen Bevölkerungsstatistik ist die letzte Bemerkung Lamberts verständlich.

Also, fährt Lambert fort, ist aus den Sterberegistern auf die Zahl der Lebenden, und danach auf die Sterblichkeit zu schliessen, wie sich dies schon Halley vorgenommen hatte. Wenn die Bevölkerung der Stadt, für die man die Sterblichkeit zu bestimmen sich anschickt, seit 100 Jahren im *Beharrungszustande* ist, so wird die Aufgabe leicht lösbar sein. *„Denn da werden jährlich ebensoviele geboren als sterben, und es erreichen eben so viele jährlich ein gewisses Alter als jährlich von höherem Alter sterben"*.

In London scheinen diese Bedingungen so ziemlich erfüllt zu sein, da dort seit 100 Jahren die Zahl der Verstorbenen stets jährlich zwischen 22 000 und 24 000 sich bewegte. Das einzig störende ist der Umstand, dass nicht alle in London geborenen dort verstorben und nicht alle dort verstorbenen auch dort geboren wurden. Aus Süssmilch entlehnt Lambert die Londoner Sterbetafel, d. h. die Zahl der zwischen bestimmten Altersgrenzen im Zeitraum von 30 Jahren Verstorbenen. Er gewinnt daraus nachstehende Uebersicht:

Alter	Gestorbene	Lebende	Reduzierte Zahl
0	272 903	750 332	1 000 000
2	64 745	477 419	636 286
5	25 912	412 674	549 996
10	22 891	386 762	515 414
20	58 474	363 871	484 884
30	71 502	305 397	407 021
40	73 238	233 895	311 726
50	59 783	160 675	214 117
60	47 269	100 875	134 423
70	33 679	53 606	71 444
80	16 948	19 927	26 555
90	2 979	2 979	3 970

Nimmt man an, London sei im Beharrungszustande, so geben die Zahlen der letzten Kolonne an, wie die Leute nach und nach wegsterben, das heisst das *Gesetz der Sterblichkeit* für London. Durch Interpolation lässt sich eine von Jahr zu Jahr fortschreitende Tabelle finden.

Lambert gibt eine Formel für die Absterbeordnung, von der am Schlusse dieses Abschnitts noch kurz die Rede sein wird.

Die Sterblichkeit ist in London grösser als auf dem Lande. Man darf annehmen, dass es sich um eine Grenzlinie nach der ungünstigen Seite hin handelt. Aus Süssmilch entlehnt Lambert eine Sterbetafel von 17 ländlichen Kirchspielen. Er nimmt an, dass dieselbe nach der günstigen Seite hin eine Grenzlage darstelle und auch dort die Bevölkerung im Beharrungszustande sei.

Lambert nimmt an, dass auf dem Lande doppelt soviel Leute leben als in den Städten und konstruiert eine Ueberlebensordnung, die derjenigen für die 17 ländlichen Kirchspiele doppelt so nahe kommt als derjenigen für London. Diese Tafel geht vom Alter 0 zu 2, zu 5, zu 10 und von da in 10-jährigen Altersintervallen weiter. Durch graphische Interpolation erhält Lambert seine Sterbetafel, die er den weitern Untersuchungen zugrundelegt.

Bemerkenswert sind die Ueberlegungen, mit denen Lambert zeigt, wie seine Kombination der beiden Ueberlebensordnungen gleichzeitig den Fehler aufhebt, den die beiden für sich betrachtet haben müssen, weil etwa vom Alter 20 an ein Zuzug vom Lande in die Stadt einsetzt.

Die grosse Lambertsche Sterbetafel geht vom Alter 0 zum Alter 103 in einjährigen Altersstufen. Die Kolonnen tragen folgende Bezeichnungen:

Alter Jahre	Jährlich Sterbende	Lebende	Summe der Lebenden	Es stirbt einer von	Mittlere Alter	Alter, wo die Hälfte gestorben
0	2 610	10 000	295 022	4	29,5	22,6
1	610	7 390	285 022	12	40,2	40,5
2	340	6 780	277 632	20	42,1	44,4
.	.	.	.	.	.	.
20	43	5 124	175 854	119	54,3	54,8
21	48	5 081	170 730	106	54,6	55,1
.	.	.	.	.	.	.
101	1	3	6	2	103,0	102,5
102	1	2	3	2	103,5	103,0
103		1	1		104,0	

Die erste Zahl der zweiten Kolonne, 2610, besagt, dass „von der Geburt an bis ins erste Jahr 2610 sterben". „Die dritte Kolonne zeigt, wie viele von 10 000 Neugeborenen in jedem Alter noch leben, und wie sich folglich ihre Anzahl in jedem Jahre vermindert. Die Zahlen dieser Kolonne sind die Summen der Zahlen der zweiten Kolonne". Die Zahlen der vierten Kolonne geben an, wie viele von jedem höhern Alter gleichzeitig leben. Die verschiedene Bedeutung dieser Zahlen demonstriert Lambert für das Alter 20, für welches sie 43, 5124 und 175 854 betragen. „Die Zahlen wollen nun sagen: *erstlich,* dass von 10 000 Neugeborenen nur 5124 ihr zwanzigstes Jahr erreichen; *zweitens,* dass von diesen 5124 während ihrem zwanzigsten Jahre 43 wegsterben, und daher nur 5081 ihr einundzwanzigstes Jahr erreichen; *drittens,* dass, wenn jährlich 10 000 geboren werden, und 10 000 sterben, an solchem Orte

5124 im zwanzigsten Jahre ihres Alters leben, und jährlich 43 im zwanzigsten Jahre sterben; *viertens*, dass an eben solchem Orte 175 854 leben, die über 19 Jahre alt sind, es sei, dass sie ihr zwanzigstes Jahr erst angetreten oder es schon längst zurückgelegt haben; *fünftens* stellt die Zahl 175 854 auch noch die Summe der Jahre vor, welche die ins zwanzigste Jahr eintretenden 5124 noch zu durchleben haben, bis sie sämtlich ausgestorben sind".

Hier gibt Lambert, hundert Jahre vor den Knapp, Becker und Zeuner die Unterscheidung zwischen den Gleichzeitigen und den Gleichaltrigen, sowohl bei den Lebenden wie bei den Gestorbenen.

Die fünfte Kolonne gibt den reziproken Wert der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeit, d. h. also $\frac{1}{q_x}$.

Die Zahlen der sechsten Kolonne, das mittlere Alter, erhält man, indem man die der vierten durch die der dritten dividiert und dazu das Ausgangsalter addiert. Beim zwanzigsten Jahr ist der Quotient 175 854 : 5 124 = $34\,^3/_{10}$, sodass also „wenn die 5 124, so ihr zwanzigstes Jahr antreten, gleich lange lebten, jeder noch $34\,^3/_{10}$ Jahre leben und daher das Alter $54\,^3/_{10}$ Jahre erreichen würden".

Da Süssmilch und einige andere „Statistiker" die Bedeutung des mittleren Alters und der wahrscheinlichen Lebensdauer (Kolonnen 6 und 7) nicht richtig erfasst hatten, verbreitet sich Lambert etwas eingehender über die beiden Zahlen.

„Wenn eine Person 47 Jahre alt ist, und man hat nachgehends weiter keine Nachricht von ihr, so entsteht die Frage, ob sie wahrscheinlicher Weise noch bei Leben sei oder nicht. Sind 19 Jahre verflossen, so müsste diese Person 66 Jahre alt sein, und da ist es gleich möglich, dass sie noch lebe oder bereits gestorben sei (Kolonne 7). Vorher ist ihr Leben, nachher wird ihr Tod wahrscheinlicher".

„Soll hingegen einer grossen Anzahl von Personen jährlich und lebenslang eine Summe Geldes ausgezahlt werden, und man will wissen, wie viel in allem zu bezahlen sein wird, so muss die sechste Kolonne gebraucht werden".

„Endlich bei solchen Fällen, so man wegen der grossen Kapitalien Zins auf Zins zu rechnen hat, sind diese beiden Kolonnen von keinem Gebrauch, sondern man muss die zweite und die dritte gebrauchen, und Jahr für Jahr rechnen".

Uebrigens zeigt Lambert auf sehr einfache und anschauliche Art, dass mittleres Alter und wahrscheinliche Lebensdauer nur dann in allen Altern gleich sein können, wenn die Ueberlebensordnung eine Gerade ist.

Endlich macht Lambert noch darauf aufmerksam, dass von der Kolonne „Summe der Lebenden" jeweils noch die Hälfte der Kolonne der Lebenden abzuziehen sei. Infolgedessen muss das in der sechsten Kolonne angegebene Alter um $^1/_2$ vermindert werden.

Die Zahlen der fünften Kolonne $\frac{1}{q_x}$ „weichen nicht nur in dem ersten Jahre merklich von der wahren Länge der Subtangente ab". „Diese Subtangente ist übrigens das eigentliche Mass der *Lebenskraft*". Hier ist also, mehr als fünfzig Jahre vor Gompertz, zum ersten Mal der reziproke Wert der *Intensität der Sterblichkeit* als *Messgrösse* empfohlen.

Die Lebenskraft $\left(\frac{1}{l'_x}\right)$ „wächst sehr schnell bis ins 16. oder 17. Jahr. Von da an nimmt sie bis ins 25ste Jahr wieder sehr schnell, nachgehends langsamer, vom 50sten Jahr an wiederum etwas weniger geschwinder ab. Mitten in den achtziger Jahren scheint sie hingegen wiederum etwas zuzunehmen, so dass sie im 95sten Jahr nicht kleiner als im 83sten ist".

Soweit über den Inhalt der ersten Abhandlung. Der Inhalt der 7. Abhandlung „Die Tödlichkeit der Kinderblattern" enthält wichtige Beiträge zur Theorie der unabhängigen Ordnungen, wie man heute sagen würde.

Daniel Bernoulli hatte, wie schon erwähnt, angenommen, dass von denen, die die Blattern noch nicht hatten, $^1/_8$ erkranken. Von den Erkrankten stirbt jeder achte. Diese Zahlen sollen als Durchschnittswerte für alle Alter gelten.

Lambert nimmt aus den Beobachtungen, die ein Doktor *Sulzer* in *Winterthur* über die Erkrankungen und Sterbefälle der Kinder an Blattern vorgenommen hatte, an, dass die Sterblichkeit der Erkrankten eine Funktion des Alters sei.

Mit $\frac{1}{\xi}$ sei die „Gefahr die Blattern zu kriegen bezeichnet", mit $\frac{1}{m}$ „das Mass der Gefahr, an den Blattern zu sterben, oder das Mass der Tödlichkeit der Pocken." $\frac{1}{\xi}$ wächst mit den Jahren bis zu einem gewissen Alter, $\frac{1}{m}$ dagegen scheint in den ersten Jahren der Kindheit grösser zu sein.

Aus Beobachtungen, die während 15 Jahren im Haag gemacht wurden, erhält Lambert, unter der Annahme, dass die Todesfälle an Blattern sich zu allen Todesfällen wie 2 : 25 verhalten und die Bevölkerung im Beharrungszustande ist, eine Tafel, in welcher er die Ueberlebensordnung, die Sterbefälle nach dem Alter insgesamt, und aufgeteilt in solche an Blattern und an den übrigen Todesursachen gibt. Nach der Formel

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta y - v}{y - \frac{1}{2} v}$$

ergibt sich eine Tafel, „wie die 18 188 Neugeborenen jährlich absterben, sowohl wenn die Blattern mit eingerechnet werden, als wenn man davon abstrahiert".

In der Formel ist r die Zahl der Ueberlebenden und Δr die Zahl der Sterbefälle, wenn die Blattern nicht wirken. y ist die Zahl der Ueberlebenden und Δy die Zahl der Sterbefälle, wenn alle Todesursachen wirken. v ist die Zahl der im betreffenden Alter an den Blattern Verstorbenen. Es handelt sich somit um eine *richtig berechnete unabhängige Ordnung.*

Das Ergebnis der Berechnung sei des historischen Interesses halber hier angeführt:

τ Jahre	y Lebende	Δy sterben	r leben	Δr sterben	$r - y$
0	18 188		18 188		0
1	13 441	4 747	13 591	4 597	150
2	12 331	1 110	12 676	915	345
3	11 713	618	12 222	454	509
4	11 289	424	12 012	210	723
5	10 982	307	11 769	243	787
6	10 727	255	11 577	192	850
7	10 516	211	11 472	105	956
8	10 341	175	11 366	106	1 025
9	10 196	145	11 271	95	1 075
10	10 072	124	11 158	113	1 086
20	9 319	773	10 392	766	1 073
30	8 215	1 094	9 200	1 192	985
40	6 799	1 416	7 633	1 567	834
50	5 396	1 403	6 063	1 570	667
—	0	5 396	0	6 063	0

Nachdem sich Lambert auf diese Weise über die Sterblichkeit an Blattern und an den übrigen Todesursachen ein Bild gemacht hat, geht er noch weiter in der Untersuchung des ganzen Problemkreises. Allerdings stehen ihm dabei noch weniger zuverlässige Beobachtungen zur Verfügung als für die eben erwähnten Untersuchungen. Er weist denn auch darauf hin, dass seine Ausführungen nur zur Erläuterung der Methode dienen sollen. Die richtigen Werte der Zahlen wären „nach einer grossen Anzahl von Erfahrungen" zu bestimmen.

Er stellt sich zunächst die Frage, wieviele Personen in jedem Alter noch leben, die die Blattern noch nicht gehabt haben, und wieviele dagegen nach bestandenen Blattern noch leben. Es ist dies die gleiche Aufgabe, wie die Bestimmung der Zahl der Aktiven und der Invaliden jeden Alters.

Im Anfang des Altersjahres τ sei die Zahl der Kinder, die die Blattern bereits überstanden haben $= w$. Dieselben sterben nach der oben angegebenen unabhängigen Ordnung r ab. Es

bleiben von diesen w Personen am Ende des Jahres noch $w\left(\frac{1-\Delta r}{r}\right)$. Dazu kommen aber noch $(z-v)$ Personen hinzu, die im Jahr τ die Blattern bekamen und sie überstanden. „Da man nun, um ein Mittel zu treffen, setzen muss, dass diese in der Mitte des Jahres die Blattern überstehen, so wird ihre Anzahl bis zu Ende des Jahres durch andere Krankheiten im Verhältnis von r zu $\left(r-\frac{\Delta r}{2r}\right)$ vermindert, und ist demnach nur

$$(z-v)\left(1-\frac{\Delta r}{2r}\right).$$

Am Ende des Jahres τ sind also noch

$$(1) \qquad w' = w\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right)+(z-v)\left(1-\frac{\Delta r}{2r}\right)$$

Personen am Leben, die die Blattern überstanden haben.

Zieht man sie von den überhaupt noch lebenden y ab so bleibt

$$(2) \qquad y-w=\eta$$

die Zahl derer, so in jedem Alter die Blattern noch nicht gehabt haben". Formel (1) entspricht der von *Schaertlin* für die Gesamtheit der Invaliden abgeleiteten Formel; Formel (2) der Schaertlinschen Formel für den Bestand der Aktiven.

Zusammenfassend kann *Lamberts* Bedeutung für die *Sterblichkeitsmessung* darin gesehen werden, dass er eine genaue Definition des *Beharrungszustandes* gegeben hat, dass er die *Intensität der Sterblichkeit* als Messgrösse verwendet, eine *unabhängige Ordnung* berechnet hat, und die verschiedenen Gruppen von Lebenden eines gemischten Bestandes mit Hülfe der *unabhängigen Wahrscheinlichkeiten* richtig berechnet. Speziell hat Lambert auch als erster die Gleichaltrigen und die Gleichzeitigen voneinander scharf unterschieden.

Zum Schlusse dieses Abschnittes seien noch die Bestrebungen erwähnt, die im 18. Jahrhundert nach einer Formel für den Verlauf der Sterblichkeit suchten.

Als erster sei *de Moivre* (1667—1754) genannt, der für die Ueberlebensordnung *linearen* Verlauf annahm.

In Holland hat *Jsaac de Graaf* eine Formel aufgestellt, deren Berechnungsweise indessen nicht völlig klar zu sein scheint.

Loys de Cheseaux gibt eine Formel, die sich allerdings den Beobachtungen nur ungenügend anschliesst.

Endlich ist auch hier *Lambert* zu erwähnen, der die Ueberlebensordnung einmal durch die Formel

$$= 26\,950 - 985{,}7\ X + 9{,}709\,150\ X^2 - 0{,}034\,27\ X^3 - 0{,}002\,701\,7\ X^4 + 0{,}000\,066\,635 X^5$$

interpoliert, und ein andermal durch

$$Y = 10\,000 \left(\frac{96 - x}{96} \right)^2 - 6\,176 \left(e^{-\frac{x}{31{,}682}} - e^{-\frac{x}{2{,}43114}} \right).$$

„Das erste Glied, welches parabolisch ist, würde angeben, dass das menschliche Geschlecht ebenso wegstirbt, wie ein zylindrisches Gefäss voll Wasser sich ausleert. Die zwei andern Glieder haben mit dem Erwärmen und Erkälten der Körper viel Aehnliches". „Dessen unerachtet will ich die hier gegebene Formel nur als etwas mit der Beobachtung noch erträglich gut übereinstimmendes, und statt des Interpolierens brauchbares ansehen".

3. Im 19. Jahrhundert.

Kurz nach 1800 erschien in Paris ein Buch „Analyse et tableaux de l'influence de la petite vérole, et de celle qu'un préservatif tel que la vaccine peut avoir sur la population et la longévité" von *E. E. Duvillard* (1755—1832). Dieser Genfer Mathematiker beschäftigt sich mit der gleichen Frage wie Lambert, nur dass ihm mehr Beobachtungen (aus Genf, dem Haag und Berlin) zur Verfügung stehen.

Für die Theorie wichtiger sind *Fouriers* (1768 — 1830) Arbeiten über die Sterblichkeit, die der berühmte Physiker in seiner Eigenschaft als Statistiker der Stadt Paris verfasste. Sachlich geht er zwar nicht über Deparcieux oder Lambert hinaus. Gegenüber dem ersten hat er indessen den Vorzug, seine Sätze über den Bevölkerungswechsel in der stationären Bevölkerung in algebraischer Form dargelegt zu haben. Fourier ist mit Lambert einer der ersten, der sich für die Probleme der Sterblichkeitsmessung interessiert, ohne dabei Rücksicht auf die Anwendung in der Versicherungsrechnung zu nehmen. Die Arbeiten Fouriers erschienen im dritten Jahrzehnt des achtzehnten Jahrhunderts.

Ein Jahrzehnt später, 1839, gab der Königsberger Physikprofessor *L. Moser* sein Buch „Gesetze der Lebensdauer" heraus, ein Buch, das lange Zeit das Standardwerk über Sterblichkeitsmessung war. Sachlich bringt er gegenüber Deparcieux und Fourier nichts neues. Dagegen hat er das Verdienst, immer wieder darauf hingewiesen zu haben, dass es angesichts des bedeutenden Einflusses der Wanderungen und der starken Veränderlichkeit der Geburtenzahlen notwendig sei, die Einflüsse dieser Erscheinungen auf die Sterblichkeitsberechnungen zu berücksichtigen. Bei Annahme einer unveränderlichen Absterbeordnung und wechselnden Geburtenzahlen lassen sich die gleichaltrig Lebenden und die zwischen zwei Altersgrenzen Verstorbenen berechnen als die Produkte aus den Geburtenzahlen und den entsprechenden Werten der Absterbeordnung.

Im Jahre 1846 erschien das „Handbuch der Populationistik" von *Christoph Bernoulli,* ein Sammelwerk, das über Theorie und bisher gesammelte Materialien aus der Bevölkerungstheorie erschöpfende Auskunft gibt. Für die Sterblichkeitsmessung ist vor allem der Abschnitt „Populationistische Biometrie oder von der statistischen Erforschung der Lebensdauer" von Interesse. Christoph Bernoulli macht ausführlich auf die Mängel der bisherigen Methoden zur Berechnung der Sterbetafeln aufmerksam. Er schlägt vor, durch Einrichtung zuverlässiger Listen der Gestorbenen und der Lebenden die Grundlagen für eine zuverlässige Berechnung von Sterbetafeln zu schaffen. Bemerkenswert ist seine Annahme, dass die Sterblichkeit in verschiedenen Ländern, Berufsgruppen usw. verschieden gross sei. Im Vergleich zu Süssmilch beispielsweise ist Bernoulli in diesen Dingen ein durchaus moderner Statistiker, der an seine Probleme ganz vorurteilslos und kritisch herangeht.

Einen interessanten Gebrauch machte *Demonferrand* von der Eulerschen Methode, indem er statt von den Geborenen von den Konskribierten ausging.

Um 1840 setzten nun in verschiedenen Staaten Volkszählungen ein. Die Ergebnisse dieser Zählungen, verbunden mit den Sterbelisten, wurden zur Berechnung von Absterbeordnungen verwendet. In England konstruierte *William Farr* 1843 eine Sterbetafel auf Grund der Zählung von 1841 und den Sterbe-

fällen des gleichen Jahres. Sodann berechnete er von der Volkszählung ausgehend mit den Sterbefällen der Jahre 1838-1844 eine neue Sterbetafel. *E. Fenger* berechnete 1842 eine Sterbetafel für Dänemark, *Quetelet* 1851 eine solche für Belgien.

Die immer vollständiger werdenden Volkszählungen und Sterbestatistiken waren nicht sofort von einer entsprechenden Verbesserung der Theorie der Sterblichkeitsmessung begleitet. Erst in den Jahren nach 1860 beginnen an mehreren Orten gleichzeitig entscheidende Fortschritte in der Theorie der Sterbetafeln in Erscheinung zu treten.

In statistisch-praktischer Hinsicht vollzog *Becker* [12] [13] den entscheidenden Schritt, indem er 1867 in den Tafeln über die Verstorbenen des Grossherzogtums Oldenburg, die Verstorbenen gleichzeitig nach Geburtsjahr, Altersjahr und Sterbejahr aufteilte. Aehnliches bereitete *Knapp* [14] zur gleichen Zeit für das Herzogtum Anhalt vor. Unabhängig davon hatte auch *G. Meyer* [15] diese Einteilung der Verstorbenen vorgeschlagen.

Becker war auch der erste, der die drei sogenannten *Hauptgesamtheiten von Verstorbenen* richtig von einander schied, nämlich

1. im gleichen Jahr Geborene, die im gleichen Altersjahr verstarben,
2. im gleichen Jahr Geborene, die im gleichen Kalenderjahr starben, und
3. die im gleichen Kalenderjahr im gleichen Alter Verstorbenen.

Knapp hat dann ergänzend dazu die zwischen den Verstorbenen und den Lebenden bestehenden Beziehungen systematisch entwickelt.

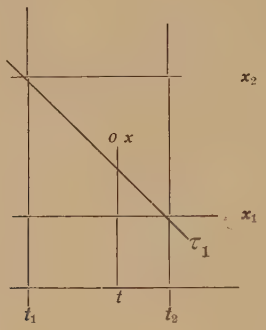
Neben den oben angeführten drei Hauptgesamtheiten von Verstorbenen definiert Knapp zwei *Hauptgesamtheiten von Lebenden:*

1. die im gleichen Jahr geborenen Personen, welche ein bestimmtes Alter erreichen,
2. die im gleichen Jahr geborenen Personen, welche an einem bestimmten Zeitpunkt noch am Leben sind.

Selbstverständlich lassen sich die Gesamtheiten auch definieren mit längeren oder kürzeren als Jahresintervallen.

Die Verhältnisse lassen sich gut überblicken mit Hilfe einer von *Lexis* [16] entwickelten graphischen Darstellung. Von jeder

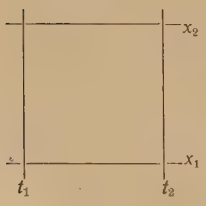
Person die unter Beobachtung steht, wird bei dieser Darstellung nur der sogenannte Sterbepunkt aufgezeichnet, und zwar so, dass die Abszisse den Geburtszeitpunkt und die Ordinate das Alter beim Tod bedeutet.



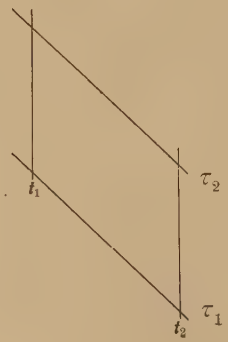
In unserer Figur sei t_1 beispielsweise = Mitternacht des 31. Dezember 1910, t_2 = Mitternacht des 31. Dezember 1911. x_1 sei = 17 Jahre, x_2 = 18 Jahre. Dann bedeutet der eingezeichnete Punkt den Sterbefall einer im Jahre 1911 geborenen Person, die im Alter zwischen 17 und 18 Jahren starb. Die eingezeichnete, mit τ_1 bezeichnete Diagonale stellt einen Zeitpunkt dar, und zwar Mitternacht des 31. Dezember 1928. Allgemein gilt $\tau_1 = t_1 + x_2 = t_2 + x_1$.

Die drei Hauptgesamtheiten von *Verstorbenen* ergeben in dieser Darstellung folgende Figuren:

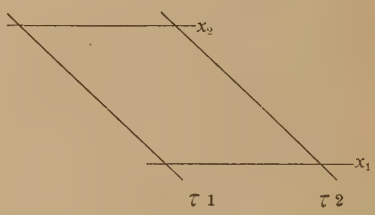
1. Hauptgesamtheit



2. Hauptgesamtheit



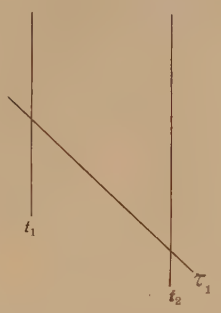
3. Hauptgesamtheit



Die beiden von Knapp angegebenen Hauptgesamtheiten von *Lebenden* lassen sich wie folgt konstruieren:

1. Hauptgesamtheit

2. Hauptgesamtheit



Zur ersten Hauptgesamtheit von Lebenden gehören alle Personen, die zwischen den Geburtszeitpunkten t_1 und t_2 geboren wurden und nach dem Alter x_1 sterben. Ihre Sterbepunkte liegen also zwischen den Ordinaten in t_1 und t_2 und oberhalb der Altersgrenze x_1. Die Sterbepunkte der Hauptgesamtheiten von Lebenden zweiter Art liegen ebenfalls zwischen den Ordinaten in t_1 und t_2 und oberhalb der Geraden, die einen bestimmten Zeitpunkt τ_1 darstellt.

Neben den Hauptgesamtheiten lassen sich auch *Nebengesamtheiten* von *Verstorbenen* festlegen; *Knapp* und *Zeuner* [17] kennen deren sechs. Die sechs Nebengesamtheiten von Verstorbenen sind wie folgt definiert:

Ia: Zahl der aus einem bestimmten Geburtszeitraum stammenden Personen, die vom Zählungstermin an sterben, bevor sie das Alter x erreichen.

b: Zahl der aus einem bestimmten Geburtszeitraum stammenden Personen, die nach Erreichung des Alters x vor dem Zähltermin τ sterben.

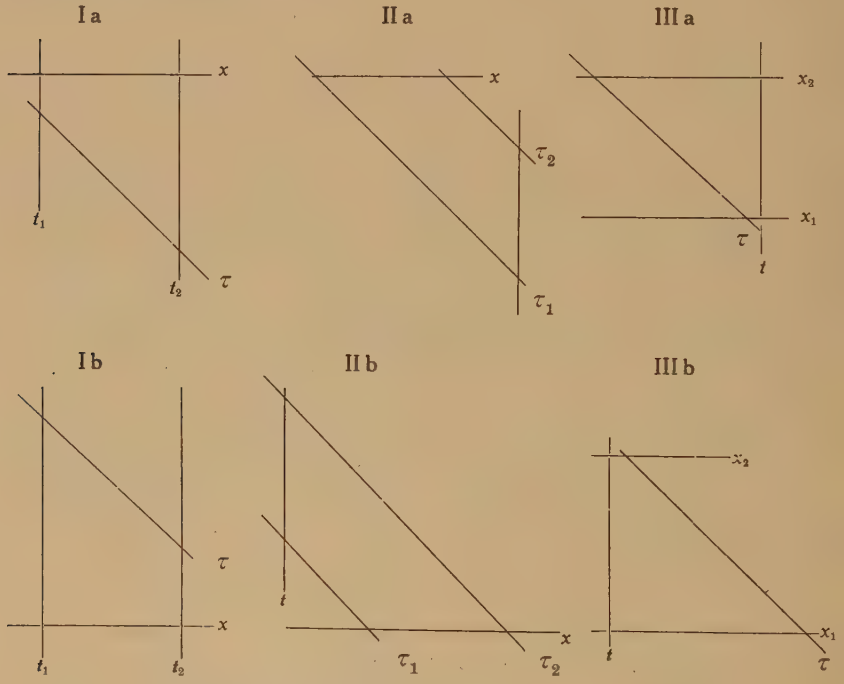
IIa: Zahl der Personen, die vor dem Zeitpunkt t geboren und zwischen den Zeitpunkten τ_1 und τ_2 gestorben sind, bevor sie das Alter x erreichten.

b: Zahl der Personen, die nach dem Zeitpunkt t geboren und zwischen den Zeitpunkten τ_1 und τ_2 nach Erreichung des Alters x gestorben sind.

III a: Zahl der Personen, die vor dem Zeitpunkt t geboren und nach τ zwischen den Altersgrenzen x_1 und x_2 gestorben sind.

b: Zahl der Personen, die nach dem Zeitpunkt t geboren und vor dem Zeitpunkt τ zwischen den Altersgrenzen x_1 und x_2 gestorben sind.

In graphischer Darstellung ergeben sich die sechs Gesamtheiten wie folgt:

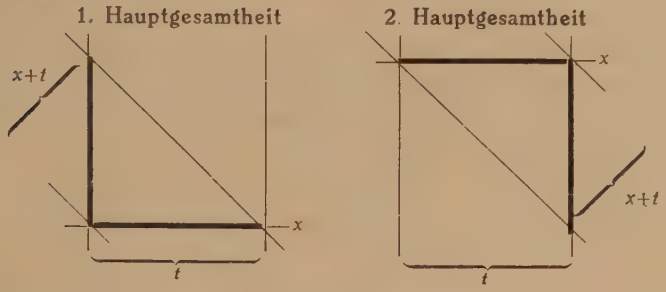


Zwei wichtige Spezialfälle der Nebengesamtheiten bilden die von *Becker* angegebenen *Grundgesamtheiten*, die *Lexis Elementargesamtheiten* nennt.

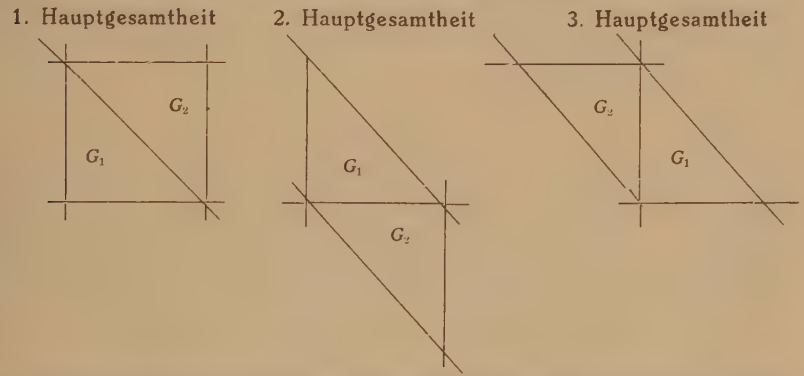
Es sind dies die Personen, welche

1. aus dem Geburtsjahr t stammend *nach* erreichtem Alter x, im Jahre $x + t$ gestorben sind,
2. aus dem Geburtsjahr t stammend *vor* erreichtem Alter x, im Jahre $x + t$ gestorben sind.

In der erwähnten graphischen Darstellung von Lexis sehen die beiden Grundgesamtheiten von Verstorbenen folgendermassen aus:



Aus den Elementargesamtheiten lassen sich die Hauptgesamtheiten der Verstorbenen ohne weiteres aufbauen.



Jede der drei Hauptgesamtheiten besteht aus je einer ersten und einer zweiten Grundgesamtheit. Bei der zweiten und dritten Hauptgesamtheit stammen die Grundgesamtheiten aus dem gleichen Kalenderjahr, bei der ersten Hauptgesamtheit dagegen aus zwei aufeinanderfolgenden Kalenderjahren. Bei der ersten und zweiten Hauptgesamtheit gehören beide Grundgesamtheiten dem gleichen Geburtsjahr, bei der dritten Hauptgesamtheit zwei aufeinanderfolgenden Geburtsjahren an.

Bei Becker ist auch für die Gewanderten die Aufteilung nach Geburts- und Altersjahren vorgesehen. Becker ist der erste, der die Wanderungen bewusst mit den Sterbefällen in die gleiche Linie stellt. Er entwickelt seine Theorie der Gesamtheiten für die Lebenden, die Verstorbenen und die Gewanderten.

Ausser den deutschen Statistikern Meyer, Knapp, Zeuner, Becker und Lexis hat unabhängig davon der Holländer *Verwey* [18] die gleichen Forderungen für die Bearbeitung der Sterblichkeitsstatistik erhoben.

Neben den oben genannten muss auch der Berliner Städtestatistiker *Richard Böckh* [19] [20] erwähnt werden, der seit 1875 alljährlich eine Berliner Sterbetafel berechnete, wobei er — wie noch zu zeigen sein wird — jeweils die Grundgesamtheiten verwendet hat.

Nachdem so für die Theorie der Sterbetafeln durch eine Theorie des Bevölkerungswechsels die Grundlage geschaffen worden war, konnte die erstere sich erst richtig entfalten.

Oft war zwar das statistische Material noch nicht nach den eben entwickelten Prinzipien verarbeitet, obschon sich auch der internationale statistische Kongress 1869 im Haag auf Antrag *von Baumhauers* dafür ausgesprochen hatte. Man war daher vielfach genötigt, eine von *Ad. Bertillon* herrührende Methode anzuwenden.

Nach der strengen Methode müsste man die Zahl der zwischen zwei Altern verstorbenen Personen durch die am Anfang der Altersklasse noch vorhanden gewesenen Personen dividieren um die Sterbenswahrscheinlichkeit zu erhalten. Man müsste also eine erste Hauptgesamtheit von Verstorbenen durch die entsprechende erste Hauptgesamtheit Lebender dividieren.

Da nun die statistischen Aemter nur die dritten Hauptgesamtheiten von Verstorbenen angaben, die wir mit M_3 bezeichnen wollen, so gab Bertillon für die Sterbenswahrscheinlichkeit q den Ausdruck

$$q = \frac{M_3}{L_2 + \frac{1}{2} M_3}$$

wobei L_2 die zweite Hauptgesamtheit von Lebenden (gleichzeitig Lebende) bedeutet.

Dieser Ausdruck kann nur dann die Sterbenswahrscheinlichkeit annähernd richtig wiedergeben, wenn immer zwei benachbarte Geburtenjahrgänge die gleiche Sterblichkeit besitzen, und auch dann nur, wenn die Sterblichkeit im betreffenden Altersjahr nur wenig variert. Die Methode kann schon aus diesem Grunde für die ersten Altersjahre keine Richtigkeit beanspruchen.

Gegenüber dieser Methode bedeutet diejenige von *Zeuner* und *Becker* einen bedeutenden Fortschritt, da sie es ermöglicht, die Sterbenswahrscheinlichkeit streng nach ihrer Definition zu berechnen, durch Benützung der ersten Hauptgesamtheit der Lebenden und der ersten Hauptgesamtheit der Verstorbenen.

Die erste Hauptgesamtheit der Lebenden oder die Gleichaltrigen ergeben sich als Summe aus der zweiten Hauptgesamtheit Lebender L_2 (Gleichzeitige) und der ersten Grundgesamtheit von Verstorbenen G_1. Für die Sterbenswahrscheinlichkeit ergibt sich in diesem Falle

$$q = \frac{G_1 + G_2}{L_2 + G_1}$$

Das Charakteristische dieser Methode liegt in der Bezugnahme auf die aus einem Geburtsjahr stammenden gleichaltrigen Lebenden und den aus demselben Geburtsjahr kommenden Verstorbenen einer Altersjahrklasse. Dabei verteilen sich die Sterbefälle jeweils über zwei Kalenderjahre.

Demgegenüber beruht die Methode von *Böckh* auf den Sterbefällen eines einzigen Kalenderjahres. Zuerst wird die Wahrscheinlichkeit p' der im Verlaufe eines Kalenderjahres x-jährig werdenden berechnet, am Ende dieses Kalenderjahres noch zu leben. Sie sind zu diesem Zeitpunkt durchschnittlich $x + {}^1/_2$ Jahre alt. Hierauf wird für die zu Beginn des betreffenden Jahres im Alter zwischen x und $x + 1$ Jahren stehenden Personen die Wahrscheinlichkeit p'' berechnet, $x + 1$-jährig zu werden. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit p des x-jährigen $x + 1$ Jahre alt zu werden, ist das Produkt der beiden genannten Wahrscheinlichkeiten.

Es sei ${}_tG_1$ eine Elementargesamtheit des Geburtenjahrgangs t, ${}_{t-1}G_2$ diejenige Elementargesamtheit, die mit ${}_tG_1$ zusammen eine Hauptgesamtheit von Verstorbenen dritter Art bildet. ${}_tL_2$ sei die Hauptgesamtheit von Lebenden zweiter Art am Ende des in Frage stehenden Kalenderjahres, ${}_{t-1}L_2$ die Gesamtheit der Gleichzeitigen zu Beginn des Kalenderjahres. Dann ist

$$p' = \frac{{}_tL_2}{{}_tL_2 + {}_tG_1}$$

Nun kann ${}_{t-1}L_2$ aus der Lebendenzahl ${}_{t-1}L'_2$ am Ende des Beobachtungsjahres durch Addition zweier Elementargesamtheiten von Verstorbenen ${}_{t-1}G_2$ und ${}_{t-1}G_2$, die zusammen eine zweite Hauptgesamtheit ${}_{t-1}H_2$ bilden, erhalten werden.

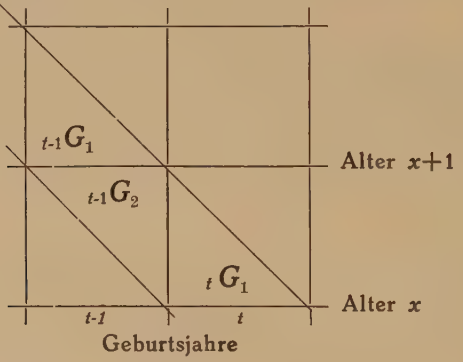
$$p'' = \frac{{}_{t-1}L_2' + {}_{t-1}G_1}{{}_{t-1}L'_2 + {}_{t-1}H_2}$$

Aus p' und p'' ist die Sterbenswahrscheinlichkeit durch

$$q = 1 - p'\,p''$$

zu bestimmen.

Die Verhältnisse lassen sich am besten anhand folgender Figur überblicken:

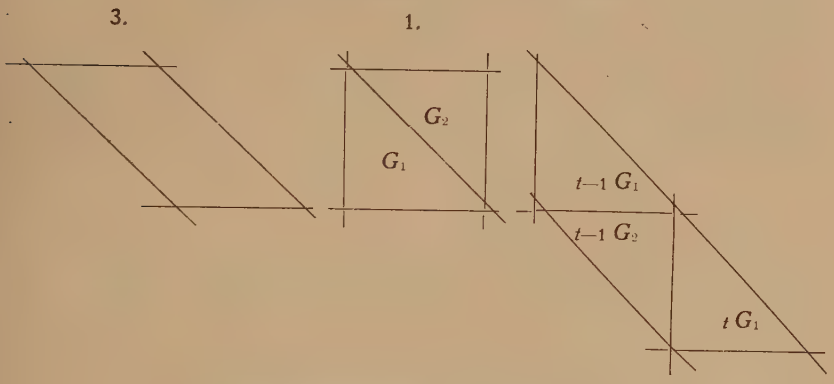


Nachdrücklich sei hier daran erinnert, dass beide Methoden, sowohl diejenige von Becker, Knapp und Zeuner, als die von Böckh nicht die Absterbeordnung einer wirklichen Generation berechnen. In beiden Fällen wird in der Tat bloss das Absterben einer fiktiven Gesamtheit angegeben. Die Absterbeordnung ist das Ergebnis von Sterbenswahrscheinlichkeiten, die aus Stücken einer grossen Zahl von Generationen (Geburtsjahrgängen) ermittelt wurden. Die beiden Methoden sind daher beide prinzipiell gleich berechtigt. Die Methode von Böckh eignet sich, wie Lexis zutreffend ausführt, vor allem in den Fällen, wo die Absterbeordnung eines einzigen Jahres näher untersucht werden soll, beispielsweise, wenn die Sterblichkeit in dem betreffenden Jahre infolge einer Epidemie sehr hoch war. Dagegen hat die Methode von Becker den Vorzug, direkt auf den 1. Hauptgesamtheiten zu beruhen. Dies ist theoretisch und aus Gründen der Rechenökonomie vorteilhaft.

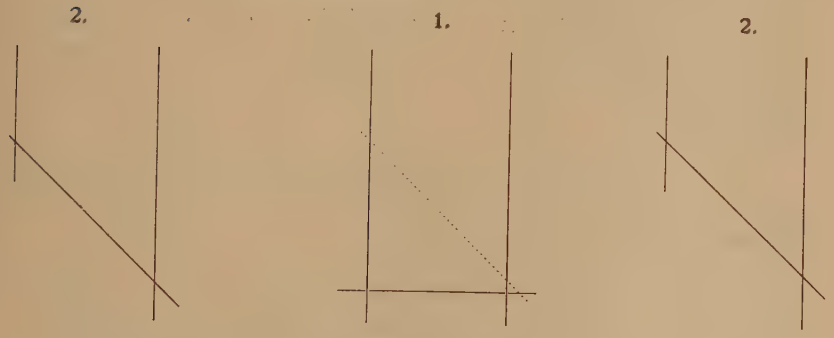
Die bisher genannten Methoden stellten die Zahl der Verstorbenen mit den aus einer Zählung erhaltenen Lebendenzahlen in Verbindung. Wir haben drei solche Berechnungsarten aufgeführt, diejenige von Bertillon, die von Zeuner und Becker und die von Böckh. Die folgenden Figuren zeigen noch einmal übersichtlich die charakteristischen Merkmale dieser drei Methoden.

Methode Bertillon Methode Becker-Zeuner Methode Böckh

Hauptgesamtheiten der Verstorbenen



Hauptgesamtheiten der Lebenden



Daneben gibt es indes noch Verfahren, die auf den Zahlen über die Verstorbenen allein (sog. Halleysche Methode) beruhen und solche, die die Verstorbenen mit den Geburten in Beziehung setzen.

Die sog. Halleysche Methode ist bei der Besprechung der Lambertschen Ideen schon dargelegt worden. Unter der Voraussetzung einer Bevölkerung, die im Beharrungszustand steht,

erhält man aus den Zahlen der Verstorbenen eines Kalenderjahres (oder einer Reihe von Jahren) die Ueberlebensordnung. Streng genommen müssen dabei die Verstorbenen nach Elementargesamtheiten ausgeschieden sein.

Vor allem *Knapp* entwickelte mit grosser Schärfe und Bestimmtheit den Begriff der *herrschenden Absterbeordnung.* Er denkt sich bei allen aus einer Generation (Geburtszeitraum) stammenden Personen stets eine und dieselbe Absterbeordnung unverändert wirkend. Bei dieser Annahme kann man die Sterbenswahrscheinlichkeiten jeden Alters berichtigen, indem man die entsprechenden Geburtszahlen zur Korrektur in Rechnung zieht. Dieses Verfahren, auf welches hier nicht näher eingegangen werden kann, ist die sog. *Anhalt'sche Methode* von Knapp.

Beruhen die sog. Halleysche und Knapps Anhalt'sche Methode auf den Sterbefällen eines Jahres oder einer Gruppe von Jahren, so die Methode von *Herrmann* auf den Sterbefällen von etwa 100 Jahren. Die dritten Hauptgesamtheiten von Verstorbenen, deren untere Altersgrenzen dem gleichen Geburtenjahrgang angehören, werden mit der Geburtenzahl dieses Jahres in Beziehung gesetzt. Diese Methode kann als eine Annäherung an das Verfahren gelten, welches die Sterblichkeit einer Generation ermitteln will. In diesem Falle müssten nämlich die 1. Hauptgesamtheiten von Verstorbenen ein und desselben Geburtsjahrganges mit den Geburten dieses Jahres in Beziehung gesetzt werden.

Wie im vorigen Abschnitt sei auch hier abschliessend eine Zusammenstellung einiger Bemühungen zur Aufstellung von Sterblichkeitsformeln erwähnt.

Als erster mag *Gompertz* genannt werden, dessen Formel

$$l_x = k \cdot g^{c^x}$$

nur für die Alter über 10 oder 15 Jahren und unter 55 oder 60 Jahren gelten sollte.

An weiteren Autoren, die sich mit dem Gesetz der Sterblichkeit beschäftigten, nennt Westergaard *Thomas Young, Littrow, Edmonds* und *Moser.*

Makeham hat die Gompertz'sche Formel etwas abgeändert, so dass er nunmehr dafür auch die Gültigkeit in den höhern Altern beanspruchte. Die Makehamsche Formel lautet bekanntlich

$$l_x = k \cdot s^x \cdot g^{c^x}$$

Eine weitere Verallgemeinerung dieser Formel nahm *Lazarus* [21] vor, bei dem die Kurve der Ueberlebenden dargestellt wird durch

$$l_x = k \cdot s^x \cdot g^{c^x} \cdot f^{h^x}$$

Abschliessend sei noch erwähnt, dass *Quiquet* die verschiedenen Ansätze vom Standpunkte einer Differentialgleichung aus systematisiert hat. Wir müssen uns hier mit diesem Hinweis begnügen.

II. Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit unter dem Einfluss des Zu- und Wegzugs.

Wie im vorigen Kapitel dargelegt wurde, ist die Theorie der Sterblichkeitsmessung, wenn vom Einfluss der Wanderungen abgesehen wird, im 19. Jahrhundert zu einem gewissen Abschluss gelangt. Zwar sind auch seit den Schriften von Knapp, Becker und Zeuner noch neue Vorschläge gemacht worden. Hier sei nur die interessante Arbeit von *Arne Fisher* [22] genannt, der auf Grund biologischer Ueberlegungen ein Verfahren entwickelt hat, um nur mit den Angaben über die Sterbefälle eine Absterbeordung aufzustellen. Doch ändert auch diese Arbeit nichts an der Tatsache, dass die Theorie, wie sie etwa Becker darstellt, als etwas Endgültiges angesehen werden kann.

Anders steht es mit der Berechnung der Sterbenswahrscheinlichkeit unter Berücksichtigung des Zu- und Wegzugs. Hier scheint eine gewisse endgültige Abklärung erst bedeutend später durch die Arbeiten von *Insolera* [23] [24] eingetreten zu sein.

Der Vollständigkeit halber wollen wir beifügen, dass *ganz allgemein das Problem der Wanderungskorrektur dem Problem der Berechnung der unabhängigen Wahrscheinlichkeiten entspricht.*

Auch in der Frage der Wanderungskorrektur, wie wir jetzt kurz sagen wollen, mag ein kurzer geschichtlicher Rückblick angezeigt sein.

Nach Westergaard war der erste, der eine Berücksichtigung der Wanderungen bei der Berechnung der Sterbetafeln versuchte, der englische Mathematiker *Th. Simpson.* Ihm stehen die Tafeln von Halley für die Stadt Breslau und die Tafeln von *Smart* für London (für die Jahre 1728 bis 1737) zur Verfügung. Er setzt sich zur Aufgabe, den Einfluss des Zuzugs auf die Londoner Sterbetafel abzuschätzen. Er tut dies so, dass er annimmt, es zögen nur unter 25-jährige nach London. Für den Teil der Sterbefälle, die von den Zuziehenden herrühren, benützt er Halleys Breslauer Tafel und kombiniert diese mit der Londoner Tafel.

In ähnlicher Weise hat *Richard Price* eine Londoner Sterbetafel berechnet.

Als Pionier in der Frage der Wanderungskorrektur muss wiederum der „muelhusio — helvetus" *J. H. Lambert* genannt werden. Er hat zwar nicht die Sterbenswahrscheinlichkeit unter dem Einflusse der Wanderungen berechnet. Indessen kommt seine Berechnung der Sterblichkeit, wenn die Blattern nicht wirksam wären, theoretisch aufs gleiche hinaus. In der Tat! Das Problem der Wanderungskorrektur besteht darin, eine Ausscheideursache (den Mehrwegzug!) zu isolieren. Statt die Wirkung der Wanderungen auszuschalten, hebt Lambert die Wirkung der Blattern auf. Wir wollen auch hier etwas näher auf seinen Gedankengang eintreten. Es handelt sich wiederum um die Anmerkung über „die Tödlichkeit der Kinderblattern" im dritten Band der „Beiträge".

„In jedem Alter τ sterben von den y Ueberlebenden in einem Jahre v an den Blattern und $\Delta y - v$ an andern Krankheiten. Nun ist klar, dass, wenn die v nicht an den Blattern stürben, wenigstens einige davon während dieses Jahres an andern Krankheiten sterben würden. Wir können nunmehr die zwei äussersten Fälle betrachten.

I. Man setze, dass alle die v gleich im Anfange des τ. Jahres an den Pocken sterben; so bleiben in allem $y - v$ und von diesen sterben sodann $\Delta y - v$ an andern Krankheiten.

II. Man setze hingegen, dass die v zu Ende des τ. Jahres an den Blattern sterben, so sind von der ganzen Anzahl y die $\Delta y - v$ bereits an andern Krankheiten gestorben.

Wir müssen nun zwischen diesen beiden Fällen das Mittel nehmen, und demnach setzen, dass von $y - \frac{1}{2}v$, welche ihr τ. Jahr anfangen, $\Delta y - v$ in dem τ. Jahr an anderen Krankheiten sterben, demnach

$$y - \tfrac{1}{2}v - \Delta y + v = y - \Delta y + \tfrac{1}{2}v$$

das $\tau + 1$. Jahr ihres Alters erreichen. Demnach vermindert sich ihre Anzahl im Verhältnis von

$$y - \tfrac{1}{2}v \quad \text{zu } y - \Delta y + \tfrac{1}{2}v,$$

das ist, von

$$y - \tfrac{1}{2}v \quad \text{zu } y' + \tfrac{1}{2}v$$

Denn $y - \Delta y = y'$ ist die Zahl, welche in der Tafel des vorhergehenden § bei dem Jahr $\tau + 1$ steht."

In die Sprache unseres Problems übersetzt lauten die Lambertschen Schlüsse so:

Von y Ueberlebenden des Alters τ sterben in einem Jahre m Personen und w scheiden durch Wegzug aus (ebensogut könnte man sagen: e kommen durch Mehrzuzug dazu). Wenn die w nicht wegzögen, so würden einige von ihnen im Laufe des Jahres sterben. Wir haben zwei Grenzfälle:

I. Alle w ziehen am Anfang des Jahres fort; es bleiben $y - w$ Personen, von denen m sterben.

II. Die w Personen ziehen am Jahresschluss fort; dann sind von den y bereits m vorher gestorben.

Als Mittel ergibt sich, dass von den $y - \frac{1}{2}w$ Personen, die das τ. Jahr anfangen m im τ. Jahr sterben, und somit

$$y - \tfrac{1}{2}w - m = y - w - m + \tfrac{1}{2}w$$

ihr $\tau + 1$. Altersjahr erreichen. Die Zahl der Ueberlebenden vermindert sich folglich im Verhältnis von

$$y - \tfrac{1}{2}w \quad \text{zu } y - w - m + \tfrac{1}{2}w$$

oder

$$y - \tfrac{1}{2}w \quad \text{zu } y' + \tfrac{1}{2}w$$

Denn $y-m-w=y'$ ist die Zahl der das Alter $\tau+1$ erreichenden nach Voraussetzung.

Als Sterbenswahrscheinlichkeit bei Ausschluss der Blattern erhält Lambert den Wert

$$q=\frac{\Delta y-v}{y-\frac{1}{2}v}$$

der in unserer „Uebersetzung"

$$q=\frac{m}{y-\frac{1}{2}w}$$

lautet.

Diese Formel wurde von *Wittstein* [25] [26] neunzig Jahre später (1862) auf anderem Wege und etwas allgemeiner wieder abgeleitet. Bevor wir uns mit der Arbeit von Wittstein befassen, sei noch ein anderer Autor vorweggenommen, der, wie Zeuner sagt, „der erste Schriftsteller war, der die Frage, die hier in Betrachtung liegt, behandelt hat."

Heym hat in einer mir leider nicht zugänglichen Arbeit im Bd. III der Masius'schen Rundschau der Versicherung (1853) [27] den Einfluss des Zu- und Wegzugs auf die Sterbenswahrscheinlichkeit berechnet.

Nach Zeuner lassen sich die Heymschen Gedankengänge etwa so darstellen:

Es seien in einem Zeitpunkt, den wir mit dem Index o bezeichnen, l_o gleichaltrige Personen in Beobachtung. Im Zeitintervall t bis $t+dt$ ziehen davon $a(t)\,dt$ Personen weg, fallen also nicht mehr unter Beobachtung. Von den in der Beobachtung verbleibenden Personen sterben im gleichen Zeitintervall $d(t)\,dt$.

Im Zeitpunkt t gehören gemäss diesen Festsetzungen der Gesellschaft noch l_t Personen an, wobei

$$l_t = l_o \int_o^t \left\{ d(t)+a(t) \right\} dt$$

Berechnet man nun $-\frac{dl_t}{l_t}$, so erhält man für den Zähler $d(t)\cdot dt$, wenn man die von den im Zeitintervall t bis $t+dt$ aus-

tretenden Personen herrührenden Sterbefälle als unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung unberücksichtigt lässt. Man erhält also

$$-\frac{dl_t}{l_t} = \frac{d(t) \cdot dt}{l_o - \int_o^t \{d(t)+a(t)\}\, dt} .$$

Nun ist

$$\int_o^z \frac{dl_t}{l_t} = ln\, \frac{l_z}{l_o} = ln\,(1-q(o,z))$$

und daher

$$ln\,(1-q(o,z)) = -\int_o^z \frac{d(t) \cdot dt}{l_o - \int_o^t \{d(t)+a(t)\}\, dt}$$

Das rechts stehende Integral lässt sich einfach berechnen, wenn man annimmt, dass die *Zahl der Sterbefälle in der der Beobachtung unterstehenden Bevölkerung konstant ist und ebenso die Zahl der Austritte.* In dieser Annahme wird

$$\int_o^t d(t) \cdot dt = d_o \cdot t$$

$$\int_o^t a(t) \cdot dt = a_o \cdot t$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$d(t) = d_o$$

und somit

$$ln\,(1-q(o,z)) = -\int_o^z \frac{d_o \cdot dt}{l_o - (d_o + a_o)t}$$

oder nach einfacher Integration

$$ln\,(1-q(o,z)) = \frac{d_o}{d_o + a_o}\, ln\, \frac{l_o - (d_o + a_o)\, z}{l_o}$$

woraus man erhält

$$q\,(o,z) = 1 - \left(1 - \frac{(d_o + a_o)\,z}{l_o}\right)^{\frac{d_o}{d_o + a_o}}$$

Daraus ergibt sich für $z = 1$ die von *Heym* aufgestellte Formel:

$$q\,(o,1) = 1 - \left(1 - \frac{d_o + a_o}{l_o}\right)^{\frac{d_o}{d_o + a_o}}$$

Ueber die „Mortalität in Gesellschaften mit successiv eintretenden und ausscheidenden Mitgliedern" hat *Wittstein* zwei Formeln aufgestellt.

Da der Bestand einer Personengruppe gleichen Alters durch die eintretenden Sterbefälle im Verlaufe der Zeit immer kleiner wird und anderseits die Sterbenswahrscheinlichkeit in den meisten Altern zunimmt, kann man annehmen, dass die Zahl der Sterbefälle sich gleichmässig über das Jahr verteilt. Beträgt die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit $q\,(o,1)$, so folgt aus dieser *ersten* Hypothese für die Wahrscheinlichkeit $q\,(o,t)$, zwischen den Altern o und t zu sterben

$$q\,(o,t) = q\,(o,1) \cdot t$$

Die Wahrscheinlichkeit eines im Zeitpunkt t Lebenden, am Ende des Jahres noch zu leben lässt sich sehr einfach berechnen.

Von den l_o leben im Zeitpunkt t noch

$$l_t = l_o\,(1 - q\,(o,1) \cdot t)$$

und am Ende des Jahres

$$l_1 = l_o\,(1 - q\,(o,1))$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$1 - q\,(t,1) = \frac{l_1}{l_t} = \frac{1 - q\,(o,1)}{1 - q\,(o,1) \cdot t}$$

Die *zweite* Hypothese nimmt an, dass die Sterbenswahrscheinlichkeit für gleichgrosse unterjährige Zeitintervalle innerhalb

eines Altersjahres konstant sei. Dies gelte auch für unendlich-kleine Zeitintervalle. Demnach wird

$$-\frac{dl_t}{l_t} = \lambda \cdot dt$$

und daraus

$$l_t = l_o \cdot l^{\lambda t}$$

da für $t = o : l_t = l_o \cdot$

Nun ist

$$1 - q\,(o,1) = \frac{l_1}{l_o}\, l^{-\lambda}$$

und somit

$$l_t = l_o\,(1 - q\,(o,1))^t$$

oder also

$$1 - q\,(o,t) = \frac{l_t}{l_o} = (1 - q\,(o,1))^t$$

Nach dieser zweiten Hypothese wird die Wahrscheinlichkeit für einen t—jährigen, am Jahresende noch zu leben

$$1 - q\,(t,1) = \frac{l_1}{l_t} = (1 - q\,(o,1))^{1-t}$$

Nun ist Wittstein gerüstet, um die Wirkung der Ein- und Austritte zu berechnen.

Insgesamt seien im Verlaufe eines Jahres

A Austritte
E Eintritte
D Todesfälle

vorgekommen.

Selbstverständlich ist (nach Wittstein)

$$l_1 = l_o + E - A - D$$

Dabei sind D alle Todesfälle, die in unserem Bestande vorkamen.

Die im Anfang dagewesenen l_o Personen ergeben infolge von Todesfällen am Jahresschluss nur noch

$$l_o\,(1-q\,(o,1)\,)\,.$$

Die Eintritte und die Austritte nimmt Wittstein als *gleichmässig über das Jahr hin verteilt an.* In jedem Zeitintervall dt

treten $E\,dt$ Personen ein
und „ $A\,dt$ „ aus.

Nach der *ersten* Hypothese leben von den im Zeitpunkt t eintretenden $E \cdot dt$ Personen noch

$$E \cdot dt\,\frac{1-q\,(o,1)}{1-q\,(o,1)\cdot t}$$

Summiert über das ganze Jahr ergeben sich aus den Eintritten

$$\int_o^1 E\,\frac{1-q\,(o,1)}{1-q\,(o,1)\,t}\cdot dt = -\frac{E}{q\,(o,1)}\,(1-q\,(o,1)\,)\;ln\;(1-q\,(o,1)\,)$$

am Jahresende noch lebende Personen.

Von den Austretenden erreichen nach denselben Ueberlegungen das Jahresende

$$-\frac{A}{q\,(o,1)}\,(1-q\,(o,1)\,)\;ln\;(1-q\,(o,1)\,)\,.$$

Die Zahl der Ueberlebenden am Ende des Jahres wird

$$l_1 = l_o\,(1-q\,(o,1)\,) - \frac{E-A}{q\,(o,1)}\,(1-q\,(o,1)\,)\;ln\;(1-q\,(o,1)\,)$$

Mit Berücksichtigung von $l_1 = l_0 + E - A - D$ ergibt sich

$$l_o\,q\,(o,1) + (E-A)\,[1 + \frac{1}{q\,(o,1)}\,(1-q\,(o,1)\,)\;ln\,(1-q\,(o,1)\,)\,] = D$$

Da man $ln\,(1-q\,(o,1)\,)$ entwickeln kann

$$ln\,(1-q(o,1)) = -\,q(o,1) - \frac{q^2(o,1)}{2} - \ldots$$

erhält man

$$l_o\,q(o,1) + (E-A)\left(\frac{q(o,1)}{1\cdot 2} + \frac{q^2(o,1)}{2\cdot 3} + \ldots\right) = D$$

und endlich

$$q(o,1) = \frac{D}{l_o + \frac{1}{2}(E-A) + \frac{1}{6}(E-A)\,q(o,1) + \ldots}$$

$$q(o,1) = \frac{D}{l_o + \frac{1}{2}(E-A)}\left(1 - \frac{\frac{1}{6}(E-A)}{l_o + \frac{1}{2}(E-A)}\,q(o,1) + \ldots\right)$$

Als erste Näherung hat man

$$q(o,1) = \frac{D}{l_o + \frac{1}{2}(E-A)}$$

Als zweite Näherung

$$q(o,1) = \frac{D}{l_o + \frac{1}{2}(E-A)} - \frac{\frac{1}{6}(E-A)\,D^2}{\left[l_o + \frac{1}{2}(E-A)\right]^3}$$

Wenden wir uns den Folgerungen aus der *zweiten* Hypothese von Wittstein zu. Nach der zweiten Hypothese leben von den $E \cdot dt$ im Zeitpunkt t Eingetretenen am Jahresende

$$E\,dt \cdot (1-q(o,1))^{1-t}.$$

Die Summe der von allen Eintretenden Ueberlebenden ist

$$\int_o^1 (1-q(o,1))^{1-t}\,E\,dt = -\frac{E\,q(o,1)}{ln\,(1-q(o,1))}$$

Analog erhält man für die Austritte die Ueberlebenden am Jahresende durch die Formel

$$-\frac{A\,q\ (o,1)}{ln\ (1-q\ (o,1)\ )}$$

Somit ergibt sich für die Zahl der Ueberlebenden am Jahresende

$$l_1 = l_o\,(1-q\,(o,1)\,) - \frac{(E-A)\,q\ (o,1)}{ln\,(1-q\ (o,1)\,)}\,.$$

Daraus ergibt sich mit Berücksichtigung von

$$l_1 = l_o + E - A - D$$

$$l_o \cdot q\,(o,1) + (E-A)\left[1 + \frac{q\,(o,1)}{ln\,(1-q\ (o,1)\,)}\right] = D$$

Der *ln* wird wiederum nach der bekannten Formel in ein Reihe entwickelt, und man hat

$$l_o\,q\,(o,1) + (E-A)\left(\frac{q\ (o,1)}{2} + \frac{q^2\ (o,1)}{12} + \ldots\right) = D$$

Als Lösung erhält man

$$q\ (o,1) = \frac{D}{l_o + \frac{1}{2}(E-A) + \frac{1}{12}(E-A)\,q\ (o,1) + \ldots}$$

Durch weitere Umformung wird daraus

$$q\ (o,1) = \frac{D}{l_o + \frac{1}{2}\ (E-A)}\left[1 - \frac{\frac{1}{12}\,(E-A)}{l_o + \frac{1}{2}\,(E-A)}\,q\,(o,1) + \ldots\right]$$

In erster Annäherung ergibt sich

$$q\,(o,1) = \frac{D}{l_o + \frac{1}{2}\,(E-A)}$$

also derselbe Wert wie nach der ersten Hypothese. Die zweite Annäherung gibt

$$q(o,1) = \frac{D}{l_o + \frac{1}{2}(E-A)} - \frac{\frac{1}{12}(E-A)\,D^2}{\left[l_o + \frac{1}{2}(E-A)\right]^3}$$

Das Ergänzungsglied ist hier halb so gross wie dasjenige nach der ersten Hypothese

Wittstein fügt diesen zwei Lösungen des Problems noch folgende Bemerkung hinzu: „Es ist theoretisch nicht ohne Interesse auch die Frage zu erörtern: ob nicht eine Verteilung der Sterbenden über das Jahr von solcher Beschaffenheit sich treffen lasse, dass der gesuchte Wert von $q\,(o,1)$ genau durch die Gleichung

$$q(o,1) = \frac{D}{l_o + \frac{1}{2}(E-A)}$$

dargestellt wird". Wittstein findet, dass die Verteilung der Sterbenden in diesem Falle der Bedingung

$$q(t,1) = q(o,1) \cdot (1-t)$$

genügen müsse.

Gustav Zeuner hat in seinen 1869 erschienenen „Abhandlungen zur mathematischen Statistik" der uns interessierenden Frage einen Abschnitt gewidmet mit dem Titel: Ueber die Sterblichkeit in Gesellschaften mit ein- und austretenden Mitgliedern.

Zunächst leitet Zeuner ganz allgemein die Gleichungen ab, die sich ergeben für eine beliebige Verteilung der Ein- und Austritte und der Sterbefälle.

A = Zahl der Austritte
E = „ „ Eintritte
D = „ „ Todesfälle

während der ganzen Beobachtungsdauer o bis t. Dann gelte

$$E = \int_o^t e(x) \cdot dx \qquad A = \int_o^t a(x) \cdot dx$$

Die Sterblichkeit sei durch die Zahlen l'_x der Ueberlebensordnung gegeben. Dann ist

$$(1) \qquad p(o,t) = \frac{l_t'}{l_o'} \; ; \; p(x,t) = \frac{l_t'}{l_x'}$$

oder auch

$$(2) \qquad p(x,t) = \frac{l_o'}{l_x'} \cdot p(o,t)$$

Im Zeitpunkt x treten $e(x) \cdot dx$ Personen ein, von denen im Zeitpunkt t noch

$$e(x) \cdot p(x,t)\, dx$$

leben. Von allen im Zeitintervall o bis t Eintretenden leben im Zeitpunkt t noch

$$\int_o^t e(x) \cdot p(x,t)\, dx$$

oder bei Verwendung von (2)

$$(3) \qquad l_o'\, p(o,t) \int_o^t \frac{e(x)}{l_x'}\, dx$$

Analog erhält man für die von den Ausgetretenen im Zeitpunkt t noch Lebenden

$$(4) \qquad l_o' p(o,t) \int_o^t \frac{a(x)}{l_x'}\, dx$$

Die im Zeitpunkt o dem Bestande angehörenden l_o Personen sind im Zeitpunkt t auf den Bestand

$$(5) \qquad l_o \cdot p(o,t)$$

zusammengeschmolzen.

Dem Bestande gehören im Zeitpunkt t noch l_t Personen an, die durch (5) + (3) — (4) gegeben sind. Also ist

$$(I) \qquad l_t = p\ (o,t)\left[l_o + l_o' \int_o^t \frac{e\,(x) - a\,(x)}{l_x'} \cdot dx \right]$$

Ueber den Verlauf der Ein- und Austritte nimmt Zeuner an, dass sie der Absterbeordnung proportional seien.

$$(A) \qquad \begin{cases} e\,(x) = m\, l_x' \\ a\,(x) = n\ l_x' \end{cases}$$

Dann wird aus (I)

$$(6) \qquad \begin{cases} l_t = p\ (o,t)\,[\,l_o + l_o'\ t\ (m - n)\,] \\ E = m \int_o^t l_x'\ dx \\ A = n \int_o^t l_x'\ dx \end{cases}$$

Nun ist noch über l_x' eine Annahme zu treffen. Zeuner setzt

$$(7) \qquad \int_o^t l_t' \cdot dt = \frac{l_o' + l_t'}{2} \cdot t$$

Nach (1) ist aber $l_t' = l_o' \cdot p\ (o,t)$

$$(8) \qquad \int_o^t l_t'\ dt = \frac{1 + p\ (o,t)}{2}\ l_o' \cdot t$$

Dann ist

$$E = m \frac{1 + p\ (o,t)}{2}\ l_o' \cdot t$$

$$A = n \frac{1 + p\,(o,t)}{2} l_o' \cdot t$$

woraus

(B)
$$\begin{cases} m = \dfrac{2\,E}{l_o' \cdot t \cdot (1+p\,(o,t))} \\ n = \dfrac{2\,A}{l_o' \cdot t \cdot (1+p\,(o,t))} \end{cases}$$

Dies in der ersten Gleichung von (6) eingesetzt gibt

(II)
$$l_t = p\,(o,t)\left[l_o + 2\,\frac{E-A}{1+p\,(o,t)} \right]$$

Setzt man in (3) und (4) die Annahmen (A) ein, so erhält man

für (3) : $l_o'\ p\,(o,t) \cdot m \cdot t$

„ (4) : $l_o'\ p\,(o,t) \cdot n \cdot t$

Ersetzt man hierin nach (B) die Werte von m und n, so wird

(9)
$$\text{aus (3)} : \frac{2\ p\ (o,t)}{1\ +\ p\ (o,t)} \cdot E$$

(10)
$$\text{aus (4)} : \frac{2\ p\ (o,t)}{1\ +\ p\ (o,t)} \cdot A$$

Von den l_o Personen, die im Zeitpunkt o der Gesellschaft angehören, sterben bis zum Zeitpunkt t

(11)
$$l_o\,(1-p\,(o,t))$$

Von den E Eingetretenen leben im Zeitpunkt t nach (9) noch

$$\frac{2p\,(o,t)}{1+p(o,t)} \cdot E,$$

gestorben sind also

$$E - \frac{2p(o,t)}{1+p(o,t)} \cdot E = E \frac{1-p(o,t)}{1+p(o,t)}$$

Von den Ausgetretenen sind in der Zeit von o bis t analog

$$A \frac{1-p(o,t)}{1+p(o,t)}$$

gestorben.

Insgesamt sind in der Gesellschaft gestorben

$$D = l_o (1-p(o,t)) + (E-A) \frac{1-p(o,t)}{1+p(o,t)}$$

oder

$$D = (1-p(o,t)) \left[l_o + \frac{(E-A)}{1+p(o,t)} \right]$$

Daraus erhält Zeuner

$$p(o,t) = -\frac{D+E-A}{2l_o} + \sqrt{\frac{l_o + E-A-D}{l_o} + \left(\frac{D+E-A}{2l_o}\right)^2}$$

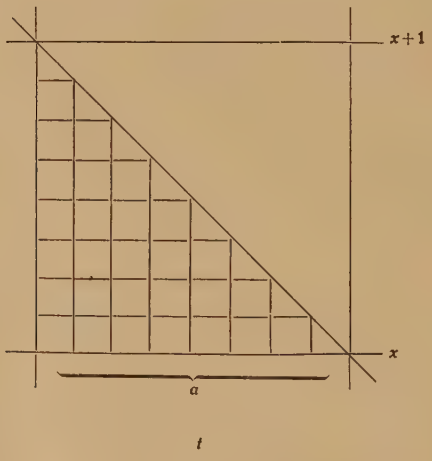
Die Methode von Zeuner führt demnach für die Berechnung der Sterbenswahrscheinlichkeit auf die Lösung einer quadratischen Gleichung.

Wesentlich einfacher stellt sich das Problem der Wanderungskorrektur für *Becker*. Als einfachste Annahme sieht dieser Autor die gleichmässige Verteilung der Zuzüge und Wegzüge über das Jahr an. „Unter dieser Annahme sind bei der hier in Frage stehenden, durch die Grenzen der Geburtszeit und durch die Altersgrenzen gegebenen Gesamtheit, ebenso aber auch bei den anderen beiden Hauptgesamtheiten, die Zugezogenen und die Weggezogenen im Mittel jeder während der Hälfte der Zeit, welche für die Gesamtheit überhaupt in Frage steht, beobachtet

worden. Der Beweis ist leicht aus der Figur zu führen. Er gründet sich darauf, dass in derselben die Hauptgesamtheiten durch von Parallelogrammen eingeschlossene Punkte dargestellt werden, und diese bei einer gleichmässigen Verteilung im Durchschnitt ebenso weit von der Eintritts- wie von der Austrittslinie der Lebenslinien entfernt sind. Man hat die Zu- und Weggezogenen daher nur zur Hälfte bei den Ueberlebenden in Rechnung zu bringen."

Es handelt sich für Becker einfach darum, die Zahlen der Lebenden durch geeignete Berücksichtigung der Zu- und Weggezogenen zu korrigieren. Dasselbe Verfahren wird von Becker auch vorgeschlagen, wenn der Zu- und Wegzug nicht über das ganze Jahr hin gleichmässig verläuft, sondern nur in bestimmten kleineren Zeitintervallen.

Die Berechnung der Wanderungskorrektur gestaltet sich für eine Grundgesamtheit 1. Art folgendermassen:



Man teilt das einjährige Geburtszeitintervall in q gleiche Teile, ebenso das Altersintervall. Die Mehrzugezogenen sollen sich gleichmässig über Geburten- und Altersintervall verteilen. Die Schnittpunkte der Parallelen zur Geburtszeit- und zur Altersachse mögen die Eintrittspunkte der Mehrzugezogenen darstellen. Dann ergeben sich aus der Figur folgende Beziehungen:

Anzahl der Mehrzugezogenen	Zeitdauer, während der sie nicht beobachtet werden	Summe der Zeit, während der alle Mehrzugezogenen nicht beobachtet werden
q	$\frac{a}{q} \cdot 1$	$\frac{a}{q} \cdot q \cdot 1$
$q-1$	$\frac{a}{q} \cdot 2$	$\frac{a}{q}(q-1) \cdot 2$
$q-2$	$\frac{a}{q} \cdot 3$	$\frac{a}{q}(q-2) \cdot 3$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
2	$\frac{a}{q}(q-1)$	$\frac{a}{q} \cdot 2 \cdot (q-1)$
1	$\frac{a}{q} \cdot q$	$\frac{a}{q} \cdot 1 \cdot q$

Die Gesamtzahl der Mehrzugezogenen beträgt

$$\frac{q\,(q+1)}{2}$$

Für diese Mehrzugezogenen beträgt die Zeitdauer, während der sie nicht unter Beobachtung standen, insgesamt

$$\frac{a}{q}\,(q+2\,(q-1)+3\,(q-2)+\ldots+(q-1)\,2+q)$$

$$=\frac{a}{q}\cdot\frac{q\,(q+1)\,(q+2)}{2\cdot 3}$$

Auf einen Mehrzugezogenen entfallen durchschnittlich

$$\frac{a\,(q+2)}{3q}$$

Zeiteinheiten, während denen er nicht unter Beobachtung steht.

Zieht man ausserdem noch die $q+1$ Personen in Betracht die dem Eintrittsalter x entsprechen, so ergibt sich eine Gesamtzahl Mehrzugezogener von

$$\frac{(q+1)\ (q+2)}{2}$$

Auf jeden Mehrzugezogenen kommen dann im Durchschnitt

$$\frac{a \cdot q}{3 \cdot q} = \frac{a}{3}$$

Zeiteinheiten, während deren die Mehrzugezogenen einer Grundgesamtheit durchschnittlich nicht unter Beobachtung sind.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich auch für die Grundgesamtheiten 2. Art durchführen.

Es ist somit nach der Auffassung von Becker leicht, eine Korrektur der Formeln für die Sterbenswahrscheinlichkeiten durchzuführen, indem die Zahl der Lebenden entsprechend verändert wird.

Einen Beitrag zur Wanderungskorrektur leistete auch *Böckh.* Wir folgen hier seinen Ausführungen: Um die im Laufe eines Jahres eintretenden Veränderungen richtig in Rechnung zu stellen, müssen die Ueberschüsse der Zuzüge über die Wegzüge mit der Zeitdauer betrachtet werden, während der die Zu- oder Weggezogenen an der Sterblichkeit teilgenommen haben. Böckh fand „geometrisch-graphischem Wege, dass für die nach irgend welcher Teilung stattfindende Beteilung der in den einzelnen Zeitabschnitten eintretenden Bewegung die Skala $1+1\cdot6+2\cdot6+3\cdot6$ etc., also 1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, 331, 397, in Anwendung kommt, dividiert durch 3 mal die Zahl der Zeitteile mal die Altersteile (bei 12 Tl. 432), — dass also, wenn die Bewegung durch Ab- und Zuzug nach Monaten konstatiert worden war, bei Berechnung der Sterblichkeit, welche unter den im Jahresanfang Lebenden vor Vollendung ihres laufenden Lebensjahres eingetreten war, diejenigen, welche im ersten Jahresmonat zugezogen waren, mit $919{,}9^0/_{00}$, im zweiten mit $766{,}2^0/_{00}$, im dritten mit $627{,}3^0/_{00}$, im vierten mit $502{,}3^0/_{00}$, im fünften mit $391{,}2^0/_{00}$, im sechsten mit $294{,}0^0/_{00}$, im siebenten mit $210{,}2^0/_{00}$, im achten mit $141{,}2^0/_{00}$, im neunten mit $85{,}6^0/_{00}$, im zehnten mit

44,0‰, im elften mit 16,2‰, im zwölften mit 2,3‰ in Rechnung treten; sollte aber umgekehrt die Sterblichkeit der gleichen Geburtsklasse nach dem vollendeten Altersjahre ermittelt werden, so müssten die entgegengesetzten, Teile gerechnet werden, oder was der Systematik wegen richtiger wäre, es müssten von den am Jahresschluss Ueberlebenden die im letzten Monat zugezogenen mit 919,0‰, im vorletzten mit 766,2‰ usf. in Abzug gebracht werden."

Es handelt sich hier also um die Angabe der Wanderungskorrektur für die beiden Grundgesamtheiten.

Schliesslich sei noch der Darstellung gedacht, die *Lexis* [16] unserem Gegenstand gewidmet hat. Er schickt ihr eine Betrachtung über die Natur der Sterbenswahrscheinlichkeiten voraus, von der wir nur festhalten wollen, dass diese Wahrscheinlichkeit einzig angibt, ob einer, der das Alter x erlebt hat, das Alter $x+1$ nicht erreicht. „Das Ergebnis wird *nur durch diese Grenzangaben bestimmt,* im übrigen aber kann es in unendlich mannigfaltiger Gestalt zustande kommen. Welche Zustände der gleichsam auf die Probe gestellte Mensch während dieser Altersstrecke durchläuft, welchen Krankheiten und Lebensgefahren er ausgesetzt ist, kommt gar nicht in Frage, es handelt sich nur um die im voraus erwogenen zwei Möglichkeiten, ob er die Altersstrecke durchlebt oder nicht". Und weiter: „Die Sterbenswahrscheinlichkeit $q\left(\frac{r}{n}, 1\right)$ für die Altersstrecke von $x+\frac{r}{n}$ bis $x+1$ Jahr ist nun eine durchaus selbständige und nicht etwa ein Bestandteil der Sterbenswahrscheinlichkeit $q(o,1)$ für die ganze Altersstrecke von x bis $x+1$ Jahre". Bevor er zu bestimmten Annahmen über die kurzstreckigen Wahrscheinlichkeiten übergeht, bemerkt er noch, dass das Problem der „Wanderungskorrektur" in ähnlicher Form auftritt z. B. bei Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit der verheirateten Frauen, wo die Einwanderungen den Trauungen, die Auswanderungen den Verwitwungen entsprechen. „Bei der Untersuchung der Sterblichkeit der aktiven Beamten sind die neuen Anstellungen mit der Einwanderung, die Uebertritte in den Ruhestand mit der Auswanderung zu vergleichen."

In ähnlicher Weise wie Wittstein trifft nun Lexis verschiedene Annahmen über q (*t*,1), wobei er sich aber im Gegensatz zu diesem nicht der Differential- und Integralrechnung bedient, sondern die auftretenden Probleme in endlicher Darstellungsweise behandelt.

Als *erste Annahme* setzt Lexis wie schon Wittstein einmal

$$q\,(t,1) = \frac{n-t}{n}\, q\,(o,1)$$

wobei n die Zahl der gleichlangen Zeitteile sei, in die das Jahr eingeteilt wurde. An der untern Grenze jedes dieser n Teile mögen l Personen eintreten. Dann ist die Zahl der von den Eintretenden im Laufe des Jahres Verstorbenen:

$$D_e = \frac{e \cdot n \cdot q(o,1)}{n} + \frac{e(n-1)}{n} \cdot q\,(o,1) + \ldots + \frac{e(n-(n-1))}{n} q(o,1) + \frac{e}{n} q(o,1)$$

$$= \frac{e \cdot n\,(n+1)}{2n} \cdot q\,(o,1)$$

Nun ist aber $n \cdot e = E$ die Gesamtzahl der im Laufe des Jahres Eintretenden. Infolgedessen wird

$$q\,(o,1) = \frac{D_e}{\frac{1}{2} E}$$

wenn man mit der Zahl der Teile gegen Unendlich strebt. Aus ähnlichen Ueberlegungen erhält man für die Sterbefälle der Austretenden

$$q\,(o,1) = \frac{D_a}{\frac{1}{2} A}$$

Tritt dazu noch ein Anfangsbestand von l_o Lebenden, so erhält man als endgültige Formel für die einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit

$$q\,(o,1) = \frac{D}{l_o + \frac{1}{2}(E-A)}$$

die Formel, die auf Lambert zurückgeht. In ihr bedeutet D die Zahl der in der Gesamtheit beobachteten Sterbefälle, nicht etwa die Zahl aller Sterbefälle unter den zu Beginn Lebenden l_o und den Eintretenden und Austretenden.

In *zweiter* Linie nimmt Lexis, wiederum in Uebereinstimmung mit Wittstein, an, dass die Sterbefälle sich gleichmässig über das Jahr hin verteilen. Teilen wir das Jahr wiederum in n gleichgrosse Zeitabschnitte, so mögen auf einen solchen Zeitabschnitt d Sterbefälle entfallen. Von den l_o Personen, die das in Frage stehende Alter erreichen, leben nach $\frac{t}{n}$ Zeitabschnitten noch l_t. Nun ist $l_t = l_o - t \cdot d$. Die Sterbenswahrscheinlichkeit $q(t,1)$ wird

$$q(t,1) = \frac{(n-t)\cdot d}{l_o - t\cdot d}$$

Da aber $\frac{n\cdot d}{l_o} = q(o,1)$ ist, wird daraus

$$q(t,1) = \frac{\frac{n-t}{n}\cdot q(o,1)}{1-\frac{t}{n}\cdot q(o,1)}$$

entsprechend der von Wittstein in seiner ersten Annahme entwickelten Formel.

Nun sei d_t die Zahl der Sterbefälle, die von e am Ende des t—ten Zeitabschnittes zugewanderten Personen bis zum Jahresende eintreten. Es ist somit

$$d_t = e \cdot \frac{\frac{n-t}{n} \cdot q\ (o,1)}{1 - \frac{t}{n}\ q\ (o,1)}$$

Ausführlich geschrieben bedeutet dies

$$e\ \frac{n-1}{n}\ q\ (o,1) = d_1 - d_1\ \frac{1}{n}\ q\ (o,1)$$

$$e\ \frac{n-2}{n}\ q\ (o,1) = d_2 - d_2\ \frac{2}{n}\ q\ (o,1)$$

. . . . . .

$$e\ \frac{1}{n}\ q\ (o,1) = d_{n-1} - d_{n\ 1}\ \frac{n-1}{n}\ q\ (o,1)$$

Lexis argumentiert nun wie folgt: „Da $q\,(o,1)$ für die Altersklassen, für die die Annahme einer gleichmässigen Dichtigkeit der Sterbepunkte überhaupt zulässig ist, nur ein kleiner Bruch ist, so sind die letzten Glieder auf der rechten Seite im Vergleich mit den d_t nur klein. Sie dürfen zwar nicht vernachlässigt werden, aber es ist gestattet, in ihnen bei der Sumierung für die d_t einen Nährungswert, nämlich $[n - t]\ v$ einzusetzen, wo v die für alle gleiche Grösse $\frac{e}{n} \cdot q\,(o,1)$ darstellt. Es rechtfertigt sich dies bei kleinen q (0,1) ohne weiteres aus der Betrachtung des vorher für d_t aufgestellten allgemeinen Ausdrucks, da der Nenner $1 - \frac{t}{n} \cdot q\,(o,1)$ näherungsweise gleich 1 gesetzt werden kann". Man erhält

$$\sum_{t=1}^{n-1} e \cdot \frac{n-t}{n} q\,(o,1) = \sum_{t=1}^{n-1} d_t - \sum_{t=1}^{n-1} (n-t) \cdot v \cdot \frac{t}{n} \cdot q\,(o,1),$$

oder

$$e \cdot \frac{n-1}{2} \cdot q\,(o,1) - D_e - \sum_{t=1}^{n-1} v \cdot t \cdot q\,(o,1) + \sum_{t=1}^{n-1} \frac{t^2 \cdot v}{n} \cdot q\,(o,1)$$

Nun ist $e\,(n-1) = E$ gleich der Gesamtzahl der Gewanderten. Die Grösse

$$\sum_{t=1}^{n-1} v \cdot t = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{e}{n} \cdot t \cdot q\,(o,1)$$

ist näherungsweise gleich D_e der Gesamtzahl der von den Eintretenden herrührenden Sterbefälle. Das letzte Glied der rechten Seite ist gleich der Summe der $n-1$ ersten Quadratzahlen, multipliziert mit $\frac{v}{n} \cdot q\,(o,1)$, oder

$$\frac{n\,(n-1)\,(2n-1)}{6} \cdot \frac{v}{n} \cdot q\,(o,1)$$

Annähernd ist auch $\frac{n\,(n-1)}{2} \cdot v$ gleich D_e. $\frac{2n-1}{n}$ wird bei

wachsendem n gleich 2. Daher wird

$$\sum_{t=1}^{n-1} \frac{t^2 \cdot v}{n} \cdot q\,(o,1) = \frac{2\,D_e}{3} \cdot q\,(o,1).$$

Aus der frühern Gleichung wird mit diesen Einsetzungen

$$\frac{E}{2} \cdot q\,(o,1) = D_e - D_e\,q\,(o,1) + \frac{2}{2} \cdot D_e\,q\,(o,1)$$

oder

$$q\,(o,1) = \frac{D_e}{\frac{1}{2}E + \frac{1}{3}D_e}$$

Sind zu Beginn des Altersjahres nicht Null, sondern l_o Personen bereits in der Gesamtheit vorhanden, so erweitert sich die letzte Formel auf

$$q\,(o,1) = \frac{D}{l_o + \frac{1}{2}E + \frac{1}{3}D_e}$$

Lexis hat weiter noch durch elementare Berechnungen — allerdings unter gewissen Annahmen über die kurzstreckigen Sterbenswahrscheinlichkeiten — dargetan, wie sich die Zuzüge in einer 1. Grundgesamtheit auswirken. Die Zahl der gestorbenen Einwohner einer Grundgesamtheit erster Art von Zugezogenen beläuft sich danach auf

$$\frac{E \cdot q\,(o,1)}{6}$$

III. Neue Art der Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit unter dem Einflusse des Zu- und Wegzugs nach der diskontinuierlichen Methode.

Alle bisher genannten Methoden — ausser derjenigen von Heym — gehen darin einig, dass über die unterjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten bestimmte Annahmen getroffen werden. *Insolera* [23] hat als erster gezeigt, dass diese Annahmen nicht nur nicht nötig, sondern sogar unstatthaft sind. Seine Methode, die im nächsten Abschnitt dargelegt wird, ist die kontinuierliche.

Man kann nun, ohne irgend eine Annahme über die unterjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten zu treffen, eine Formel für die Sterbenswahrscheinlichkeit unter dem Einflusse des Zu- und Wegzugs aufstellen, ohne sich dabei der Infinitesimalrechnung zu bedienen. Man denkt sich das Altersjahr in z (z. B. 12) Teile geteilt. Vorausgesetzt wird dabei einzig, dass

1. die Hauptgesamtheiten der gleichaltrigen Sterbenden und der gleichaltrigen Mehrzugezogenen oder Mehrweggezogenen für jeden der z Teile bekannt sei,
2. die Ein- und Austritte am Ende jedes der z Jahresteile erfolge.

In gewissen Fällen hat die in diesem Abschnitt gewonnene Formel gegenüber derjenigen von Insolera den Vorteil, dass sie der während eines Jahres oft sehr unterschiedlichen Gestaltung der Wanderungen Rechnung trägt. Insolera nimmt dagegen ausdrücklich an, dass der Mehrzuzug sich im Verlaufe des Jahres nicht ändere. Nun weiss man aber, dass insbesondere auch für Städte die Wanderungen ausgesprochen saisonsbedingt sind. Bei der Berechnung von Sterbetafeln für Städte darf dieser Umstand nicht ausser acht gelassen werden. Die Formel von Insolera ist daher bei Sterbetafeln für Gebiete, die jahreszeitliche Schwankungen der Wanderungen zeigen, nur mit Vorbehalt anwendbar.

Wir bezeichnen die Zahl der im 1., 2., 3., . . . z. Teil des Jahres verstorbenen Gleichaltrigen mit d_1, d_2, . . d_z. Zu Beginn des Jahres mögen der Gesamtheit l_o gleichaltrige Personen angehören. Nach dem ersten Intervall treten r_1 gleichaltrige Personen dazu, nach dem zweiten r_2 usw. bis r_{z-1} vor Beginn des z. Intervalls. Mit $q\,(o,z)$ bezeichnen wir die Sterbenswahrscheinlichkeit im ganzen z Teile umfassenden Zeitraum, mit $q\,(t,z)$ die Wahrscheinlichkeit einer nach dem t. Zeitintervall lebenden Person bis zum Ende des z. Intervalls zu sterben. Unter diesen Voraussetzungen erhält man:

$$(1) \qquad \sum_{t=1}^{z} d_t = l_o \; q\,(o,z) + \sum_{t=1}^{z-1} r_t \cdot q\,(t,z) \cdot$$

Die Gleichung besagt, dass die Summe aller in der Gesamtheit erfolgten Sterbefälle gleich ist der Zahl der aus den anfangs vorhandenen l_o Personen herrührenden Sterbefälle plus die Summe der aus dem Mehrzuzug hervorgehenden Todesfälle. r_t kann auch negativ sein; es handelt sich dann um einen Mehrwegzug. Und die Sterbefälle aus dem Mehrwegzug sind in diesem Fall mit negativem Vorzeichen versehen, weil sie nicht in der Gesamtheit stattfinden und daher unter den beobachteten $\sum d_t$ nicht inbegriffen sein können.

Nun sei für einen Moment angenommen, die Kurve der Ueberlebenden für die in Frage stehende Altersstrecke sei bekannt; l_o^* sei die Zahl der Ueberlebenden, die dem Ausgangsalter, l_t^* diejenige, die dem Ausgangsalter plus t entspricht. Mit $\varphi(t)$ sei dann die Grösse

$$\varphi(t) = \frac{l_o^*}{l_t^*}$$

bezeichnet. Aus dieser Definition folgt sofort $\varphi(o) = 1$. Nun ist

$$q(t,z) = 1 - \frac{\varphi(t)}{\varphi(z)} \tag{2}$$

Setzt man diese Werte für $q(t,z)$ in Gleichung (1) ein, so ergibt sich

$$\sum_{t=1}^{z} d_t = l_o - l_o \cdot \frac{\varphi(o)}{\varphi(z)} + \sum_{t=1}^{z-1} r_t - \sum_{t=1}^{z-1} r_t \cdot \frac{\varphi(t)}{\varphi(z)} \tag{3}$$

Daraus erhält man

$$\varphi(z) \cdot \sum_{t=1}^{z} d_t = l_o\,\varphi(z) - l_o + \varphi(z) \sum_{t=1}^{z-1} r_t - \sum_{t=1}^{z-1} r_t \cdot \varphi(t)$$

$$l_o = \varphi(z)\left\{ l_o + \sum_{t=1}^{z-1} r_t - \sum_{t=1}^{z} d_t \right\} - \sum_{t=1}^{z-1} r_t \cdot \varphi(t) \tag{4}$$

In dieser Gleichung sind l_o, r_t und d_t bekannte, $\varphi(1), \varphi(2), \ldots \varphi(z)$ unbekannte Grössen. Die Grössen $\varphi(1), \varphi(2) \ldots \varphi(z)$

lassen sich dadurch bestimmen, dass man die Gleichung nacheinander für $z=1, 2, \ldots z$ ansetzt, nachdem man sie zweckmässig noch in folgende Form gebracht hat:

$$(5)\quad \frac{l_o}{l_o+\sum_{t=1}^{z-1} r_t-\sum_{t=1}^{z} d_t}=\varphi(z)-\frac{1}{l_o+\sum_{t=1}^{z-1} r_t-\sum_{t=1}^{z} d_t}\sum_{t=1}^{z-1} r_t\ \varphi(t)$$

Nun wird

$$(6)\quad \begin{cases} z=1: \dfrac{l_o}{l_o-d_1}=\varphi(1) \\ z=2: \dfrac{l_o}{l_o+r_1-(d_1+d_2)}=\dfrac{1}{l_o+r_1-(d_1+d_2)}\Big\{r_1\varphi(1)\Big\}+\varphi(2 \\ z=3: \dfrac{l_o}{l_o+r_1\ \ r_2-(d_1+d_2+d_3)}=\dfrac{-1}{l_o+r_1+r_2-(d_1+d_2+d_3)} \\ \qquad\qquad \Big\{r_1\varphi(1)+r_2\varphi(2)\Big\}+\varphi(3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Aus diesen z Gleichungen lassen sich die z Unbekannten $\varphi(1), \varphi(2), \ldots \varphi(z)$ bestimmen. Man setze $\varphi(1)$ aus der ersten Gleichung in die zweite ein, so bekommt man $\varphi(2)$. Durch Einsetzen von $\varphi(1)$ und $\varphi(2)$ in die dritte Gleichung erhält man $\varphi(3)$ usw.

Es wird

$$(7)\quad \varphi\ (1)=\frac{l_o}{l_o-d_1}$$

$$\varphi\ (2)=\frac{l_o}{l_o+r_1-(d_1+d_2)}+\frac{1}{l_o+r_1-(d_1+d_2)}\cdot\frac{l_o}{l_o-d_1}\ r_1$$

$$=\frac{l_o\left(1+\frac{r_1}{l_o-d_1}\right)}{l_o+r_1-(d_1+d_2)}$$

$$(8)\quad \varphi\ (2)=\frac{l_o\,(l_o-d_1+r_1)}{(l_o-d_1)\,(l_o+r_1-(d_1+d_2))}$$

$$\varphi(3) = \frac{l_o}{l_0 \; r_1+r_2-(d_1+d_2+d_3)} + \frac{1}{l_0+r_1+r_2-(d_1+d_2+d_3)} \left\{ r_1\varphi(1)+r_2\cdot\varphi(2) \right\}$$

$$= \frac{l_o + \frac{r_1 l_o}{l_o - d_1} + \frac{r_2 l_o (l_o - d_1 + r_1)}{(l_o - d_1)(l_o + r_1 - (d_1+d_2))}}{l_o + r_1 + r_2 - (d_1 + d_2 + d_3)} \cdot$$

$$= \frac{l_0(l_0-d_1)(l_0+r_1-(d_1+d_2)) + r_1 l_0 (l_0+r_1-(d_1+d_2)) + r_2 l_0 (l_0-d_1+r_1)}{(l_0-d_1)(l_0+r_1-(d_1+d_2))(l_0+r_1+r_2-(d_1+d_2+d_3))}$$

$$\frac{l_o(l_o - r_1 - d_1)(l_o - r_1 - (d_1 - d_2)) + r_2 l_o (l_o - d_1 + r_1)}{(l_o - d_1)(l_o - r_1 - (d_1 - d_2))(l_o - r_1 + r_2 - (d_1 + d_2 + d_3))}$$

$$(9) \quad \varphi(3) = \frac{l_0 (l_0 - r_1 - d_1)(l_0 - r_1 - r_2 - (d_1 + d_2))}{(l_0-d_1)(l_0+r_1-(d_1+d_2))(l_0+r_1+r_2-(d_1+d_2+d_3))}$$

Schon aus diesen Gleichungen wird die Formel für $\varphi(z)$ ersichtlich. Man hat

$$(10) \qquad \varphi(z) = \frac{\prod_{t=1}^{z} \left(l_o + \sum_{i=1}^{t-1} r_i - \sum_{i=1}^{t-1} d_i\right)}{\prod_{t=1}^{z} \left(l_o + \sum_{i=1}^{t-1} r_i - \sum_{i=1}^{t} d_i\right)}$$

Da $q(o,z) = 1 - \frac{1}{\varphi(z)}$, und $q(o,z) + p(o,z) = 1$ ist, erhält man für die Ueberlebenswahrscheinlichkeit

$$(11) \qquad p(o,z) = \frac{\prod_{t=1}^{z} \left(l_0 - \sum_{i=1}^{t-1} r_i - \sum_{i=1}^{t} d_i\right)}{\prod_{t=1}^{z} \left(l_0 + \sum_{i=1}^{t-1} (r_i - d_i)\right)}$$

Dieses Ergebnis lässt sich anschaulich interpretieren. Es ist nämlich

(12) $$p(o,z) = \frac{l_0 - d_1}{l_0} \cdot \frac{l_0 + r_1 - d_1 - d_2}{l_0 + r_1 - d_1} \cdot \ldots \cdot \frac{l_0 + r_1 + r_2 \ldots + r_{z-1} - d_1 - d_2 \ldots - d_z}{l_0 + r_1 + r_2 \ldots + r_{z-1} - d_1 - d_2 \ldots - d_{z-1}}$$

Der erste Faktor bedeutet die Ueberlebenswahrscheinlichkeit für das erste Zeitintervall, der zweite für das zweite Intervall und der lezte Faktor für das letzte Intervall. In der Tat stimmen diese Grössen mit unserer Annahme überein, dass die Ein- und Austritte jeweilen am Ende jedes Alterszeitabschnittes vor sich gehen.

Gleichung (11) lässt sich auf eine einfachere Form bringen, wie man an Hand von (12) leicht einsieht. Es ist

(13) $$p(o,z) = \left(1 - \frac{d_1}{l_o}\right)\left(1 - \frac{d_2}{l_o + r_1 - d_1}\right) \ldots \ldots \left(1 - \frac{d_z}{l_o + r_1 + r_2 \ldots + r_{z-1} - d_1 - d_2 \ldots - d_{z-1}}\right)$$

und als Produktformel geschrieben

(14) $$p(o,z) = \prod_{t=1}^{z} \left(1 - \frac{d_t}{l_o + \sum_{i=1}^{t-1}(r_i - d_i)}\right)$$

Diese Formel setzt einzig voraus, dass die Hauptgesamtheiten der gleichaltrig Verstorbenen und der gleichaltrigen Zu- und Weggezogenen in den z Zeitintervallen bekannt seien. Die Grösse dieser Zeitabschnitte ist beliebig. Es kann sich beispielsweise um Monate, also um ungleichlange Zeitstrecken handeln.

Als Spezialfall erhält man bei gleichmässiger Verteilung der Sterbefälle und der Zuzüge auf z gleichgrosse Zeitstrecken aus Gleichung (14)

(15) $$p(o,z) = \prod_{t=1}^{z} \left(1 - \frac{d_o}{l_o + (t-1)(r_o - d_o)}\right)$$

wobei d_o die für alle z Intervalle gleichbleibende Hauptgesamtheit der gleichaltrig Verstorbenen, r_o die ebenfalls in allen Intervallen gleichgrosse Hauptgesamtheit der gleichaltrigen Mehrzugezogenen bedeutet.

Für $p\ (o,z)$ lässt sich in diesem Falle noch folgende Bedingung formulieren:

$$(16)\quad \left(1 \quad \frac{d_o}{l_o \quad (r_o \quad d_o)}\right)^z \leq p\,(o,z) \leq \left(1 - \frac{\cdot\ d_o}{l_o + (z-1)(r_o \quad - d_o)}\right)^z$$

wobei die obern Zeichen gelten, wenn $d_o > r_o$. Der einzige Fall, in welchem die Ungleichungen nicht ohne weiteres gelten, ist $d_o > r_o$ und $(z - 1)\,(r_o - d_o)\,| > l_o$; doch wird derselbe praktisch bei Sterbetafeln wohl nie eintreten. Die Zahl der Sterbefälle müsste gegenüber dem Anfangsbestand unverhältnismässig gross sein.

IV. Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit unter dem Einfluss der Wanderungen nach der Methode von Jnsolera.

Jnsolera geht in seiner grundlegenden Arbeit [23] von folgender Gleichung aus

$$(1)\qquad \int_o^z d(t) \cdot dt = l_o\, q\,(o,z) + \int_o^z r(t) \cdot q\,(t,z) \cdot dt$$

l_o bedeutet darin die Zahl der gleichaltrig Lebenden zu Beginn des in Frage stehenden Altersjahres. $d\ (t) \cdot dt$ ist die Zahl der im Zeitpunkt t in der Gesamtheit sterbenden Personen, $r\ (t) \cdot dt$ der Mehrzuzug im Zeitpunkt t und $q\ (t,z)$ die Sterbenswahrscheinlichkeit für das Altersintervall t bis z. Gleichung (1) besagt, dass die Zahl aller beobachteten Sterbefälle gleich ist der Zahl der Verstorbenen aus der Ausgangsgesamtheit, vermehrt um die Sterbefälle aus den Mehrzuziehenden.

Sind alle Grössen ausser den q bekannt, so kann die Gleichung (1) aufgelöst werden für ein beliebiges Intervall $o\,z$ $(o < z \leq 1)$. Zur Lösung setzen wir

(2) $$D_z = \frac{1}{l_o} \int_0^z d(t) \cdot dt \ , \ R_z = \frac{1}{l_o} \int_0^z r(t) \cdot dt$$

und weiter für $q\ (t,z)$

(3) $$q\ (t,z) = \frac{\varphi\ (z) - \varphi\ (t)}{\varphi\ (z)}$$

Dabei ist $\varphi(z) = e^{\int_0^z \mu(t) \cdot dt}$, wenn $\mu(t)$ die Sterblichkeitsintensität bedeutet.

Setzt man D_z , R_z *und* $\varphi\ (z)$ in die Gleichung (1) gemäss (2) und (3) ein, so erhält man

$$D_z = 1 - \frac{1}{\varphi\ (z)} + \int_0^z R'_t \frac{\varphi\ (z) - \varphi\ (t)}{\varphi\ (z)} \cdot dt$$

oder

(4) $$\varphi(z)\ (1 + R_z - D_z) - 1 = \int_0^z R'_t\ \varphi\ (t) \cdot dt$$

Diese Integralgleichung für φ lässt sich mit Benützung eines Theorems von Jnsolera auflösen. Ist

$$u\ (x) = v\ (x) + \lambda \int_0^X K\ (x,z)\ v\ (z)\ dz$$

eine Volterrasche Integralgleichung zweiter Art für $v\ (z)$, deren Kern die Form

$$K(x,z) = \left(\frac{f(x)}{f\ (z)} \right)^{\lambda} \cdot \frac{d}{dz}\ ln\ f\ (z)$$

hat, wobei λ eine beliebige Konstante und $f\ (x)$ eine beliebige Funktion ist, die im Einheitsquadrat endlich und stetig bleibt. Dann ist der lösende Kern der Integralgleichung für irgend ein endliches, von Null verschiedenes λ gleich

$$-K\ (x,x) = -\frac{d}{dx} ln\ f(x)$$

Wie man sieht hängt der lösende Kern nicht von λ ab.

Wir schreiben noch (4) etwas anders:

$$\varphi(z) = \frac{1}{1 - R_z - D_z} + \int_0^z \frac{R'_y}{1 - R_z - D_z} \varphi(y)\, dy$$

Setzt man für den Kern

$$\frac{R'_y}{1 - R_z - D_z} = \lambda \left(\frac{f(y)}{f(z)}\right)^{\lambda} \cdot \frac{f'(y)}{f(y)} \tag{5}$$

so erhält man als Lösung von (4):

$$\varphi(z) = \frac{1}{1 + R_z - D_z} + \lambda \int_0^z \frac{f'(y)}{f(y)} \cdot \frac{dy}{1 + R_y - D_y} \tag{6}$$

Hier ist noch $f(y)$ zu eliminieren. Es ist

$$\lambda \cdot \left(\frac{f(y)}{f(z)}\right)^{\lambda} \cdot \frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{d}{dy} \left(\frac{f(y)}{f(z)}\right)^{\lambda} \tag{7}$$

und daraus

$$\lambda \cdot \frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{d}{dy} \left\{ ln \left(\frac{f(y)}{f(z)}\right)^{\lambda} \right\} \tag{8}$$

Durch Integration von (5) ergibt sich bei Beachtung von (7)

$$\int \frac{R'_y}{1 + R_z - D_z}\, dy = \int \frac{d}{dy} \left(\frac{f(y)}{f(z)}\right)^{\lambda} dy$$

oder

$$\left(\frac{f(y)}{f(z)}\right)^{\lambda} = \frac{R_y}{1 + R_z - D_z} + C(z) \tag{9}$$

Setzt man in (9) $y = z$, so erhält man für $C(z)$

$$C(z) = \frac{1 - D_z}{1 - R_z - D_z} \tag{10}$$

Somit hat man für $\left(\frac{f(y)}{f(z)}\right)^{\lambda}$

$$\left(\frac{f(y)}{f(z)}\right)^{\lambda} = \frac{1+R_y-D_z}{1+R_z-D_z} \tag{11}$$

Als endgültige Lösung wird aus (6)

$$\varphi(z) = \frac{1}{1-D_z+R_z} + \int_o^z \frac{R'_y \cdot dy}{(1-D_z+R_y)\,(1-D_y+R_y)} \tag{12}$$

In Verbindung mit (3) bietet (12) die allgemeine Lösung des Problems der Wanderungskorrektur, bei Annahme *kontinuierlicher* Vorgänge.

Die Funktionen R und D liessen sich nun aus dem empirischen Verlaufe der Mehrzuzüge und der Sterbefälle herleiten, und danach durch Integration der Gleichung (12) — unter Umständen nur durch angenäherte Berechnung — die Werte von $\varphi(z)$ und $q\,(o,z)$ bestimmen.

Es muss weitern Untersuchungen vorbehalten bleiben, die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten der Gleichung (12) ins Einzelne zu verfolgen.

Wir begnügen uns damit, hier zu zeigen, wie Jnsolera für den Fall des *gleichförmigen Verlaufs* der *Sterbefälle* und des *Mehrzuzugs* eine Näherungsformel herleitet.

Es sei

$$D_t = \Delta_o \cdot t \;, \quad R_t = \rho_o \cdot t \;, \tag{13}$$

wobei Δ_o und ρ_o konstant sind. Aus (12) wird

$$\varphi(z) = 1 \cdot \frac{1}{(\Delta_o - \rho_o)\,z} + \int_o^z \frac{\rho_o \cdot dt}{(1-\Delta_o z+\rho_o t)\,(1-(\Delta_o - \rho_o)\cdot t)} \tag{14}$$

Bezeichnen wir das Integral auf der rechten Seite mit J, so bekommen wir durch Partialbruchzerlegung und Integration

$$J = \frac{\rho_o \ln(1-\Delta_o z)}{\Delta_o\{(\Delta_o - \rho_o)\,z - 1\}} \tag{15}$$

In (14) eingesetzt gibt

$$(16) \qquad \varphi(z) = \frac{\Delta_o - \rho_o \ln(1 - \Delta_o z)}{\Delta_o \{1 - (\Delta_o - \rho_o) z\}}$$

und daraus in Verbindung mit (3)

$$(17) \qquad q(o,z) = 1 - \frac{\Delta_o \{1 - (\Delta_o - \rho_o) z\}}{\Delta_o - \rho_o \ln(1 - \Delta_o z)}$$

Setzt man darin z 1 und statt o das Alter x, so ergibt sich die endgültige Formel

$$(18) \qquad q_x = 1 - \Delta_x \frac{1 - \Delta_x + \rho_x}{\Delta_x - \rho_x \ln(1 - \Delta_x)}$$

Da Δ_x stets positiv und kleiner als 1 ist, ja sogar in den meisten Altersjahren nur wenig von Null verschieden ist, darf $\ln(1 - \Delta_x)$ in eine Reihe entwickelt werden und die Glieder 3. und höhern Grades können vernachlässigt werden.

Es ist

$$\ln(1 - \Delta_x) = -\Delta_x - \frac{\Delta_x^2}{2} - \frac{\Delta_x^3}{3} - \ldots\ldots$$

In (18) eingesetzt gibt

$$(19) \qquad \boxed{q_x \simeq \frac{\Delta_x (2 + \rho_x)}{2 + \rho_x (2 + \Delta_x)}}$$

die endgültige Formel von *Jnsolera.* Sie gilt für positive und negative Werte von ρ_x , vorausgesetzt, dass $\Delta_x \leq 1 + \rho_x$ ist da sonst $q_x > 1$ · Praktisch heisst dies, dass die Formel von Jnsolera nicht gilt, wenn statt eines Mehrzuzugs oder eines schwachen Mehrwegzugs ein so starker Mehr*weg*zug besteht, dass $1 - \rho_x < \Delta_x$ wird.

V. Berechnung der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeit bei mehrjährigen Beobachtungsperioden.

In diesem Abschnitt sollen kurz drei Fragen gestreift werden, die sich bei der Berechnung der Sterbetafeln aus mehrjährigen Beobachtungen ergeben.

1. Als erstes sei hingewiesen auf die Probleme, die sich aus den Beziehungen zwischen Beobachtungszeitraum und Volkszählung ergeben. Es stellt sich die Frage, ob der Beobachtungszeitraum zwischen zwei Volkszählungen gelegt werden solle oder ob nur die Ergebnisse einer Volkszählung zu verwerten seien, die dann zweckmässig in die Mitte des Beobachtungszeitraumes fällt.

Allgemein geht die Tendenz dahin, die Sterbetafeln nur mehr für eine kurze Reihe von Jahren zu berechnen, meist für *vier- oder fünfjährige Perioden,* je nachdem die Volkszählung am Jahresende oder in der Jahresmitte stattfindet. Die Verkürzung der Beobachtungszeitdauer drängt sich angesichts der häufig recht starken zeitlichen Veränderungen der Sterblichkeit auf. Da die Volkszählungen in den meisten Ländern nur alle zehn Jahre durchgeführt werden, ist man, wenn man dem Postulat auf Verkürzung des Beobachtungszeitraumes nachkommen will, gezwungen, diesen um eine Volkszählung herumzulegen.

2. Wie *Lexis* [16] gezeigt hat, wird bei gleichförmiger Verteilung der Zu- und Wegzüge die Wanderungskorrektur nach den bisher üblichen Formeln dann unnötig, wenn die Volkszählung in der Mitte zwischen den direkt ermittelten beiden Elementargesamtheiten von Verstorbenen liegt.

Burkhardt [28] hat diese Frage auf mehrjährige Beobachtungen und die Zeunersche und Rahts'sche Methode der Sterblichkeitsberechnung ausgedehnt. Er fasst seine Ergebnisse in folgenden Satz zusammen:

„Findet die Volkszählung in der Mitte bezw. am Ende eines Kalenderjahres statt, so wird der Einfluss der Wanderbewegung auf die einzelnen Sterbenswahrscheinlichkeiten näherungweise ausgeschaltet bei der Zeunerschen Methode dann, wenn man sie auf eine gerade bezw. ungerade Zahl von Geburtsjahren anwendet und bei der Rahts'schen Methode dann, wenn man sie für eine ungerade bezw. gerade Zahl von Sterbekalenderjahren durchführt".

Auch der Bearbeiter der schweizerischen Sterbetafel 1920 - 21 äussert sich in ähnlicher Weise [29]: „Beschränkt man sich auf die beiden Jahre vor und nach einer Volkszählung, so ist der Altersaufbau der Bevölkerung zu Beginn des zweiten Jahres ohne weiteres aus den Ergebnissen der Volkszählung genau bekannt. Der Altersaufbau am Anfang des ersten Jahres kann aus diesen Zahlen unter Berücksichtigung der Geburten und Sterbefälle ohne weiteres abgeleitet werden. Die Wanderbewegungen im Laufe eines Jahres sind im allgemeinen für ein gegebenes Alter so gering, dass sie ohne grossen Nachteil vernachlässigt werden können. Die beiden Jahre können sich übrigens gegenseitig aufwiegen. Nehmen wir z. B. an, es bestehe für beide ein Einwanderungsüberschuss. Da wir denselben vernachlässigen, so erhalten wir für das erste Jahr eine etwas zu starke Anfangsbevölkerung, was den Sterblichkeitssatz etwas vermindert. Im zweiten Jahre werden hingegen auch die Sterbefälle der im Laufe des Jahres zugewanderten Personen berücksichtigt, was den Sterblichkeitssatz wiederum erhöht."

Die hier angeführten Ueberlegungen sind — systematisch ausgebaut — dann wichtig, wenn es sich *bei Unkenntnis der tatsächlichen Wanderungsbewegungen* darum handelt, den Beobachtungszeitraum im Verhältnis zum Volkszählungstermin so zu wählen, dass der Einfluss der Wanderungen auf die Sterbenswahrscheinlichkeiten möglichst klein wird.

3. Bei der Berechnung einer Sterbetafel aus mehrjährigen Beobachtungen kann die mittlere Sterbenswahrscheinlicheit aus den Beobachtungen der einzelnen Jahre auf zwei Arten berechnet werden.

Konkret stellt sich das Problem folgendermassen. Wir haben die ${}_il_x$ und die ${}_id_x$ für eine Reihe von z. B. 4, 5 oder 10, allgemein n Jahren. Nun kann man die mittlere Sterbenswahrscheinlichkeit entweder nach der Formel

$$(1) \qquad q_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} {}_iq_x}{n}$$

oder nach der Formel

$$(2) \qquad q_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} {}_i d_x}{\sum_{i=1}^{n} {}_i l_x}$$

berechnen.

Aus der zweiten Formel erhält man

$$q_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} {}_i d_x \cdot {}_i l_x}{\sum_{i=1}^{n} {}_i l_x}$$

oder, da $\frac{{}_i d_x}{{}_i l_x} = {}_i q_x$:

$$(3) \qquad q_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} {}_i l_x \cdot {}_i q_x}{\sum_{i=1}^{n} {}_i l_x}$$

Formel (3), die mit (2) übereinstimmt, zeigt, dass wir nach der zweiten Formel das mit den l_x gewogene Mittel der ${}_i q_x$ berechnen, während die erste Formel das ungewogene Mittel darstellt.

Die Formel (2), oder die gleichwertige Formel (3), ist der Formel (1) vorzuziehen, da sie die unterschiedliche Bedeutung ungleich starker Geburtenjahrgänge berücksichtigt. Die Berechnung der Sterbenswarscheinlichkeiten nach der Formel (2) bedeutet im Grunde nichts anderes als die Verwendung von Hauptgesamtheiten der gleichaltrigen Lebenden und Verstorbenen mit einem Geburtszeitraum von n Jahren.

Hat man für die q_x der einzelnen Geburtsjahre eine Wanderungskorrektur nach der Formel von Insolera oder nach der im Abschnitt III abgeleiteten Formel ausgeführt, so kann die durchschnittliche Sterbenswahrscheinlichkeit nicht nach der Formel (2) berechnet werden. Man muss sich auf die Formeln (1) oder (3) stützen. Die Formel (3) ist auch in diesem Falle der Formel (1) aus den bereits angeführten Gründen vorzuziehen.

B. Praktischer Teil.

I. Die Berechnungsweise der schweizerischen Volkssterbetafeln.

Aufzeichnungen über die Sterblichkeit gehen in der Schweiz in einzelnen Städten recht weit zurück. *Ney* [30] erwähnt Sterbetafeln für die Stadt Genf von *Odier* für die Jahre 1560 bis zum Ende des 16. Jahrhunderts, für das 17. Jahrhundert und für das 18. Jahrhundert bis zum Jahr 1760. *Mallet* hat für die gleiche Stadt eine Sterbetafel aus den Sterblichkeitsbeobachtungen der Jahre 1814—1833 berechnet. Die Genfer Sterbetafel von *Heyer* und *Lombard* benützt die Angaben der Jahre 1816—1830 in der Stadt Genf und den Gemeinden Plainpalais und Eaux-Vives. *D'Espine* stützt sich auf die Angaben über den Kanton Genf in den Jahren 1834—1845. Auch der Zürcher Pfarrherr und Statistiker *J. H. Waser* verfügte über eine Sterbetafel, doch fehlt jede Angabe über ihre Grundlagen. Ein Berner Pfarrherr, *Muret*, berechnete eine Sterbetafel aus Sterblichkeitsbeobachtungen in der Waadt.

Alle diese Sterbetafeln scheinen nur die Verteilung der Verstorbenen auf die einzelnen Altersklassen zu geben. Es handelt sich also um die sogenannte Halleysche Methode.

Den ersten Ansatz zu einer einigermassen theoretisch begründeten Berechnung einer Sterbetafel finden wir bei *Kocher*. Nach *Bodenehr* [31] berechnet Kocher seine Tafel im Prinzip nach der Eulerschen Methode unter Berücksichtigung der geringern oder stärkern Zunahme der Bevölkerung. Als Grundlagen dienen den Kocherschen Berechnungen die Sterberegister der

Kantone	*in den Jahren*
Bern	1839 bis 1842
Genf	1838 „ 1842
Neuenburg	1819 „ 1843
St. Gallen	1826 „ 1840
Solothurn	1836 „ 1842
Thurgau	1807 „ 1843
Zürich	1839 „ 1841

Eine Tafel mit Material aus 15 Kantonen hat *W. Gysi* [32] berechnet. Ueber die Methode gibt Gysi keine genauen Angaben. Er benützt die Volkszählungsergebnisse von 1860 und die Sterberegister der

Kantone	*aus den Jahren*
Zürich	1852 bis 1864
Bern	1850 „ 1865
Luzern	1857 „ 1864
Schwyz	1860 „ 1864
Glarus	1850 „ 1865
Nidwalden	1850 „ 1865
Freiburg	1853 „ 1864
Solothurn	1865
Baselland	1850 „ 1852
Appenzell A. Rh.	1850 „ 1864
Appenzell I. Rh.	1852 „ 1864
St. Gallen	1865
Thurgau	1850 „ 1862
Waadt	1837 „ 1860
Neuenburg	1850 „ 1852

Mit dem Jahre 1870 setzt die zentralisierte eidgenössische Statistik der Bevölkerungsbewegung ein. Die Schweiz verfügt von da an über ein sehr gutes statistisches Material zur Berechnung von Volkssterbetafeln. Die bisher berechneten Tafeln werden hier eine nach der andern genannt. Zur Gewinnung einer gewissen Einheitlichkeit bezeichne ich die allgemeinen schweizerischen Sterbetafeln mit römischen Zahlen. Unsere Zusammenstellung reicht von der Sterbetafel I (1876/77 - 1880/81) bis zur Sterbetafel VI (1921 - 30) und der Sterbetafel VIa (1929-32).

Sterbetafel I (1876/77 - 1880/81).

Diese erste schweizerische Sterbetafel [33] ist nach der Methode *Becker - Zeuner* auf Grund der Sterblichkeitsstatistiken der Jahre 1876 - 1881 und der Volkszählungsergebnisse von 1880 berechnet worden. Die *Wanderungen wurden nicht berücksichtigt.* Ueber die Gründe sagt die Publikation des Eidgenössischen Statistischen Amtes: „ . . . also ohne Rücksicht auf die

Wanderungen; wir hätten aber auch die in den Jahren 1879 und 1880 in grosser Zahl Ausgewanderten, oder wenigstens den Ueberschuss derselben über die Eingewanderten zu der Bevölkerung der Jahre vor 1879 hinzurechnen sollen; indem wir, aus Mangel an genügenden Angaben, dies unterliessen, haben wir die Zahl der in den Jahren 1876 bis 1878 Lebenden zu klein angenommen und daher eine die Wirklichkeit etwas übersteigende Mortalität herausgerechnet; wir bedauern dies gar nicht, da das Ergebnis nach unsern auf eine so kurze Periode eingeschränkten schweizerischen Erfahrungen noch immer eher zu günstig und daher dem auf das Jahr 1880/81 basierten unbedingt vorzuziehen ist."

Sterbetafel I a (1880 - 1881)

Nach den gleichen Grundsätzen berechnet wie die Sterbetafel I.

Schaertlin [34] [35] hat durch gründliche Ueberlegungen dargetan, dass die Wanderungseinflüsse in den Jahren 1876 - 1880 zu gering waren, um sich auf die Sterbetafel in erheblichem Masse auszuwirken. Er schätzt, dass die Sterbenswahrscheinlichkeiten höchstens um $1\,^0/_{00}$ zu gross ausgefallen sind. Ferner ist „der störende Einfluss der Abrundung auf die Sterbenswahrscheinlichkeit so gross, dass er den der Wanderung überwiegt."

Sterbetafel II (1881 - 1888).

Diese Tafel ist von *Durrer* nach der Methode *Böckh* aus den Mortalitätsbeobachtungen der Jahre 1881 - 88 und den Volkszählungen von 1880 und 1888 berechnet worden [36]. „Während aber Böckh die Ueberlebens- bezw. Sterbenswahrscheinlichkeiten einer mehrjährigen Periode einfach aus dem arithmetischen Mittel der entsprechenden Wahrscheinlichkeitswerte der einzelnen Beobachtungsjahre bildet, wurde die schweizerische Absterbeordnung aus den Summen der entsprechenden Beobachtungsgrössen der einzelnen Kalenderjahre direkt abgeleitet." Die Durchschnittsberechnung erfolgte also entsprechend der Formel (2) des Abschnittes A. V unserer Arbeit.

„Für die im Jahre 1888 Geborenen und für die Lebenden von 90 und mehr Jahren wurde ein Wanderungsüberschuss überhaupt nicht angenommen und als Wanderungsüberschuss

der Gebürtigen vom Jahre 1887 der Durchschnitt des Ueberschusses der Geburtsklassen 1881/1886 eingesetzt.

Der Gesamtüberschuss jeder Jahresgeneration wurde sodann arithmetisch-proportional zur Zeitdauer, während welcher die betreffende Geburtsklasse unter Beobachtung stand, auf die einzelnen Kalenderjahre verteilt. Diese Verteilung stützt sich auf die doppelte Annahme, dass die Sterblichkeit der Zu- und Weggezogenen der allgemeinen Mortalität der betreffenden Geburtsklasse entspreche und dass die Wanderungen sich gleichmässig über die ganze Beobachtungsperiode erstrecken."

Die eine Hälfte des auf ein Jahr entfallenden Wanderungsüberschusses wurde auf den Anfang des betreffenden Jahres, die andere Hälfte dagegen auf den Beginn des folgenden Beobachtungsjahres angesetzt. „Auf Anfang des Kalenderjahres 1881 und 1889 wurde somit je $^1/_{16}$, auf den Anfang der Jahre 1882 bis 1888 dagegen je $^1/_8$ des Gesamtwanderungsüberschusses in Anrechnung gebracht."

Für die Geburtsjahrgänge 1881 bis 1888, bei denen die Sterbefälle auf die entsprechenden Geburten bezogen wurden, erfuhr das Verfahren der Wanderungskorrektur eine Abänderung, indem angenommen wurde, dass auf das Geburtsjahr selbst nur die Hälfte des jährlichen Wanderungsüberschusses entfalle. Wir gehen auf diese einfachen Modifikationen hier nicht weiter ein.

Sterbetafel III (1889-1900).

Die Berechnung der Sterbetafel III erfolgte nach den gleichen Grundsätzen wie die der Sterbetafel II.

Sterbetafel IV (1901-1910).

Die Tafel hat die Sterblichkeitsbeobachtungen der Jahre 1901 bis 1910 und die Volkszählungen von 1900 und 1910 zur Grundlage [37]. Sie wurde nach der Methode *Becker-Zeuner* berechnet.

„Die Verteilung der Wanderungsüberschüsse auf die einzelnen Jahre haben wir dadurch umgangen, dass wir, der Methode Blenck gemäss, die Anzahl der Lebenden $\bar{V}_x$ der einzelnen Geburtsjahre für jedes Beobachtungsjahr einerseits aus dem Anfangsbestande durch Vorwärtschreibung und anderseits aus dem

Endbestande durch Rückwärtsschreibung bestimmten und der Berechnung das arithmetische Mittel aus den erhaltenen Grössen zugrundelegten, wonach

$$q_x = \frac{\sum_{\tau=1901}^{1909} {}^{\tau}m'_{x|x+1} + \sum_{\tau=1902}^{1910} {}^{\tau}m''_{x|x+1}}{\frac{1}{2}\left(\sum_{\tau=1901}^{1909} {}^{\tau}V_x + \sum_{\tau=1909}^{1901} {}^{\tau}V_x\right)} \text{ ''}$$

Die sogenannte Methode Blenck, die eigentlich von *Ballod* [38] herrührt, erhöht die Lebendenzahlen jedes Jahres um die Hälfte des Mehrzuzugs, der sich zwischen den beiden Volkszählungen eingestellt hat.

Sterbetafel V (1920 - 1921).

Da in den Jahren 1911 - 20 die Wanderungen ganz ungleichmässig verlaufen waren und man keine genauen Angaben über ihre Bewegung besass, war die Berechnung einer Sterbetafel für den ganzen Zeitraum zwischen den Volkszählungen von 1910 und 1920 nicht möglich [29]. Ausserdem wies das Jahr 1918 infolge der Grippeepidemie eine ausserordentliche hohe Sterblichkeit auf. Es wäre unzweckmässig gewesen, eine Sterbetafel für jene 10 Jahre zu berechnen. Das Eidg. Statistische Amt beschränkte sich infolgedessen auf die Sterblichkeitsstatistik der Jahre 1920 und 1921.

Die Sterbetafel V wurde nach der Methode *Becker-Zeuner* berechnet. Eine Berücksichtigung der Wanderungen fand nicht statt. Der Bearbeiter der Sterbetafel bemerkt dazu, dass im Jahr 1920 die Wanderungen infolge der Grenzsperre und der Passvorschriften ein Mindestmass erreicht hatten.

Um eine Vergleichstafel zur Verfügung zu haben, wurde eine Tafel für 1910/11 berechnet, die wir als

Sterbetafel IVa (1910 — 1911)

bezeichnen. Die Berechnung erfolgte nach den gleichen Grundsätzen wie bei der Sterbetafel V.

Sterbetafel VI (1921 — 1930)

Die Tafel VI beruht auf der Mortalitätsstatistik für die Jahre 1921—1930 und den Volkszählungen von 1920 und 1930. Die Wanderungsüberschüsse wurden gleichmässig auf die Lebenden verteilt. Die Tafel wurde nach der Methode *Becker-Zeuner* berechnet.

Sterbetafel VI a (1929 — 1932)

Wiederum nach der Methode *Becker-Zeuner* berechnet, beruht diese Tafel auf den Sterblichkeitsbeobachtungen der Jahre 1929 bis 1932 und der Volkszählung vom 1. Dezember 1930. Die Wanderungen wurden nicht berücksichtigt.

Die Sterbetafeln VI und VI a sind noch nicht veröffentlicht.

Neben diesen allgemeinen Volkssterbetafeln hat *Ney* [39] noch sogenannte *„tables actuarielles"* berechnet für die Perioden 1901 — 1910, 1910 — 1911 und 1920 — 1921. Die Besonderheit dieser Tafeln besteht darin, dass die Hauptgesamtheiten jeweils nicht die Alter zwischen ganzen Jahren umfassen, sondern vom Alter von z. B. $14^1/_2$ zum Alter $15^1/_2$ definiert werden. Damit wird erreicht, dass die Angaben der Tafeln für das sogenannte versicherungstechnische Alter gelten.

Uebersicht über die allgemeinen schweizerischen Volkssterbetafeln.

Sterbetafel	Sterblichkeitsbeobachtungen der Jahre	Volkszählungen	Berechnungsmethode	Wanderungskorrektur
I	1876/77—1880/81	1880	Becker-Zeuner	nein
Ia	1880—1881	1880	Becker-Zeuner	nein
II	1881—1888	1880, 1888	Böckh	ja
III	1889—1900	1888, 1900	Böckh	ja
IV	1901—1910	1900, 1910	Becker-Zeuner	ja
IV a	1910—1911	1910	Becker-Zeuner	nein
V	1920—1921	1920	Becker-Zeuner	nein
VI	1921—1930	1920, 1930	Becker-Zeuner	ja
VI a	1929—1932	1930	Becker-Zeuner	nein

Die Mehrzahl der in diesem Abschnitt genannten Sterbetafeln ist in der unter [30] zitierten Arbeit von *Ney* in Heft 22 der Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker zusammengestellt.

II. Die Sterbetafeln für die Städte Basel, Bern und Zürich.

1. Basler Sterbetafel.

Aus den Ergebnissen der Volkszählung von 1870 und der Sterblichkeitsstatistik von 1870 und 1871 hat *Kinkelin* eine Basler Sterbetafel berechnet [40]. Die Methode ist nicht bekannt.

Stohler hat eine Tafel aus den Ergebnissen der Volkszählung von 1920 und der Sterblichkeits- und Wanderungsstatistik der Jahre 1918 bis 1924 hergeleitet [41]. Seine Methode ist die Becker-Zeunersche. Er berechnet

$$q_x = \frac{\sum d_i}{\sum l_i}$$

Die Wanderungskorrektur vereinfacht Stohler durch die Annahme, dass die Zu- und Abwanderung auf die Jahresmitte erfolgt.

2. Berner Sterbetafel.

Aus den Ergebnissen der Volkszählung vom 1. Dezember 1920 und den Sterblichkeitsbeobachtungen der Jahre 1919 bis 1922 berechnete *Grütter* Berner Sterbetafeln [42]. Er hat die Rechnung nach drei Methoden durchgeführt, und zwar

1. nach der Methode Bertillon
2. nach der Methode Böckh
3. nach der Methode Becker-Zeuner.

Eine Besonderheit dieser Berner Sterbetafeln ist darin zu erblicken, dass die Berechnung für fünfjährige Altersgruppen erfolgte. „Von vorneherein wurde die Annahme gemacht, dass die Sterbenswahrscheinlichkeit im Altersraum x bis $x+n$ (wo $n=5$ für $x \geqq 5$) derjenigen des mittleren Alters $x + \frac{n-1}{2}$ entspreche."

Für die Alter über 70 Jahre wurden die Sterbenswahrscheinlichkeiten durch Anpassung der Hyperbel

$$q - b = \frac{a}{100 - x}$$

gefunden. Dabei erhielten die Grössen a und b folgende Werte

	Männer	*Frauen*
a	= + 3,3816	+ 5,3616
b	= — 0,0342	— 0,1056

Der Einfluss der Wanderungen wird für die Jahre 1919—1922 als geringfügig eingeschätzt und nicht berücksichtigt.

3. Zürcher Sterbetafel.

Die von *Völlm* berechnete Zürcher Sterbetafel [43] basiert auf der Volkszählung von 1920 und den Sterblichkeits- und Wanderungsstatistiken der Jahre 1919 bis 1925. Die Berechnung erfolgte nach der Methode *Becker-Zeuner.* Die Wanderungskorrektur wurde nach dem bei Böckh erwähnten Verfahren für vierteljährliche Altersintervalle vorgenommen. Die Zusammenfassung der mehrjährigen Beobachtungen fand nach der Formel

$$q = \frac{\sum d_i}{\sum l_i}$$

statt.

Ueber die Wanderungskorrektur macht Völlm eine Bemerkung, die für die Städte von grundsätzlicher Wichtigkeit ist: „Ein bekanntes einfaches Näherungsverfahren bekommt man unter der Annahme, dass sich die Wanderungen *gleichmässig* über die ganzen Parallelogramme wie *A C D F* (Gesamtheiten Gleichaltriger) verteilen. Nun schwankt aber die Zahl der Wandernden in starkem Masse mit der Jahreszeit und Proben für die Stadt Zürich haben ergeben, dass in einzelnen Fällen von der Korrektur auf Grund dieser Annahme sogar eine Verschlechterung statt eine Verbesserung der Sterbenswahrscheinlichkeit zu erwarten ist."

III. Vorschläge für die Berechnung neuer schweizerischer Volkssterbetafeln.

Aus dem Ueberblick über die Methoden zur Berechnung von Volkssterbetafeln ergeben sich einige Vorschläge für die Berechnung schweizerischer Volkssterbetafeln.

1. Die stark wechselnden Sterblichkeitsverhältnisse legen die Wahl einer *vierjährigen Beobachtungsperiode* nahe, wie dies für die schweizerische Tafel VIa (1929—1932) erstmals ange-

wandt wurde. Eine Beobachtungsperiode von zwei Jahren ist zu kurz; es ergibt sich ein etwas unregelmässiger Verlauf der Sterbenswahrscheinlichkeiten. Die schweizerischen Volkszählungen finden am 1. Dezember, also gegen das Jahresende hin statt. Um mit der Beobachtungsperiode gleichweit vor wie hinter die Volkszählung zu reichen, ist eine gerade Zahl von Jahren angezeigt. Angesichts des kleineren Umfangs des Zahlenmaterials ist für die *Städte* vielleicht eine Beobachtungsperiode von *sechs Jahren* zweckmässig. Falls nicht ausserordentliche Verhältnisse vorliegen sind auch hier drei Jahre vor und drei Jahre hinter den Volkszählungstermin zu legen.

2. Als Berechnungsmethode ist die *Becker-Zeunersche* in erster Linie heranzuziehen.

3. Die *Wanderungskorrektur* ist wenn immer möglich anzubringen.

Bei den Sterbetafeln für die *ganze Schweiz* wird man versuchen müssen, auf Grund der Statistik der aus- und eingewanderten militärpflichtigen Schweizer, der Statistik des Auswanderungsamtes über die überseeische Auswanderung, der Statistiken über die eingereisten ausländischen Arbeitskräfte und der Wanderungsstatistiken der Großstädte, verbunden mit den aus den Volkszählungen hergeleiteten Wanderungsüberschüssen, wenigstens ein angenähertes Bild über die Wanderungsbewegung in der Beobachtungsperiode zu gewinnen. Zeigt sich, dass der Verlauf der Wanderungen nahezu gleichförmig ist, so kann die Formel von Jnsolera verwendet werden. Andernfalls wäre die Berechnung nach der in Abschnitt III des ersten Teils dieser Arbeit abgeleiteten Formel vorzunehmen.

Bei den Sterbetafeln der *Städte* wird man von vorneherein annehmen dürfen, dass die Wanderungskorrektur angebracht werden muss. Es dürfte sich empfehlen, die Formel des Abschnitts III des ersten Teils für vierteljährliche oder monatliche Zeitabschnitte anzuwenden. Dazu ist es nötig, die Verstorbenen und die gewanderten Gleichaltrigen auszuzählen. Dies ist wenigstens in Bern, Basel und Zürich, wo auf den Zu- und Wegzugskarten das genaue Geburtsdatum der Gewanderten angegeben ist, ohne weiteres möglich.

Schlusswort

Es bleibt mir zum Schluss nur noch übrig, darauf hinzuweisen, dass die hier dargelegten Methoden nicht nur Geltung haben für Sterbetafeln. Sinngemäss angewendet können sie bei der Berechnung von Eheschliessungstafeln, Tafeln der Scheidung, der Fruchtbarkeit, der Sterblichkeit nach Zivilständen, nach Todesursachen und nach Berufsgruppen benützt werden. Wie schon in der Einleitung gesagt wurde, sind auch ausserhalb der Bevölkerungsstatistik viele Ausscheideordnungen berechnet worden. Es liesse sich noch eine ganze Reihe von solchen nennen, deren Berechnung sich den in dieser Arbeit entwickelten Methoden unterstellt. Vielfach kommt der hier als „Wanderungskorrektur" bezeichneten Ausschaltung von Störungen eine weit erheblichere Bedeutung zu als im Falle der Sterbetafeln. Die Formel von Jnsolera und die im Abschnitt III des ersten Teils entwickelte neue Formel gewinnen dabei naturgemäss an Wichtigkeit.

Berichtigungen.

S. 45: Die zweite Formel lautet richtig:

$$l_t = l_o \, e^{-\lambda_t}$$

S. 45: Die dritte Formel lautet richtig:

$$1 - q(o,1) = \frac{l_1}{l_o} = e^{-\lambda}$$

S. 58: Die erste Formel lautet richtig:

$$q(t,1) = (1 \quad t)\, q(o,1) = \frac{n - nt}{n}\, q(o,1)$$

S. 58: Die zweite Formel lautet richtig:

$$D_e = \frac{en}{n}\, q(o,1) + \frac{e(n-1)}{n}\, q(o,1) + \ldots + \frac{e(n-(n-2))}{n}\, q(o,1) + \frac{e}{n} q(o,1)$$

Literaturverzeichnis.

[1] *Moser Chr.:* Leben und Sterben in der schweizerischen Bevölkerung. Rektoratsrede. Bern, 1917.

[2] *Kurtz E. B.:* Life expectancy of physical property based on mortality laws. New York, 1930.

[3] *Friedli W.:* Intensitätsfunktion und Zivilstand. Beiträge zu einer Theorie der unabhängigen und zusammengesetzten Ordnungen. Mitt. schweiz. Versicherungsmathematiker Heft 21, 1926, S. 25 — 90.

[4] *Simonett J.:* Beiträge zur Ausgleichung von Massenerscheinungen nach der Methode von King. Mitt. schweiz. Versicherungsmathematiker, Heft 28, S. 91 — 148, 1933.

[5] *Halley Edm.:* An estimate of the degrees of the mortality of mankind etc. . . Philosophical Transactions, London, 1693.

[6] *Schenker O.:* Zur Bedeutung und Bearbeitung von Altersangaben in der Statistik. Ztschr. schweiz. Statistik und Volkswirtschaft, 69. Jhrg., S. 531 — 539, 1933.

[7] *Westergaard H.:* Contributions to the History of Statistics. London, 1932.

[8] *Süssmilch J. P.:* Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, usw. 4. Auflage, Berlin, 1788.

[9] *Bernoulli Daniel:* Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causé par la petite vérole et les avantages de l'inoculation pour la prévenir. Histoire de l'acad. roy. des sciences, anné 1760, Paris, 1766.

[10] *Lambert J. H.:* Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendungen. 3 Bände. Berlin, 1765.

[11] Lœwy *A.:* Johann Heinrich Lamberts Bedeutung für die Grundlagen des Versicherungswesens. Festgabe für Alfred Manes, S. 280 — 287, Berlin, 1927.

[12] *Becker:* Statistische Mitteilungen über das Grossherzogtum Oldenburg, IX, 1867.

[13] *derselbe:* Zur Berechnung der Sterbetafeln an die Bevölkerungsstatistik zu stellende Forderungen. Berlin, 1874.

[14] *Knapp G. F.:* Theorie des Bevölkerungswechsels. Braunschweig, 1874.

[15] *Meyer G.:* Die mittlere Lebensdauer. Jahrbücher für Nat.-oek. und Statistik, Bd. 8, S. 1, 1867.

[16] *Lexis W.:* Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik. Jena, 1903.

[17] *Zeuner G.:* Abhandlungen zur mathematischen Statistik. Leipzig, 1896.

[18] *Verwey A. J.:* Principles of vital statistics. Journ. Stat. Soc. London XXXVIII, 1875.

[19] *Böckh R.:* Sterblichkeitsstatistik für den Preussischen Staat im Umfange von 1865. Jahrbücher f. Nat.-oek. u. Statistik Bd. 25, S. 201.

[20] *derselbe:* Statistisches Jahrbuch der Stadt Berlin. Neunter Jahrgang 1881 und neunzehnter Jahrgang 1892. Berlin, 1883 und 1894.

[21] *Lazarus W.:* On some problems in the theory of probabilities. Journ. Inst. Actuaries, XV, 1870.

[22] *Fisher Arne:* An elementary treatise on Frequency curves and their application in the Analysis of death curves and live tables. American edition. New York, 1922.

[23] *Jnsolera F.:* Sul calcolo della probabilità annuale di morte in gruppi aperti di popolazione. Atti reale accad. scienze di Torino, Vol. LXII, Disp. 1 a, S. 611 — 619, 1926 — 1927.

[24] *derselbe:* Su particolari equazioni di Volterra e loro applicazione finanziaria e demografica. Rendiconti Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Vol. LX, S. 247—252, 1927.

[25] *Wittstein Th.:* Die Mortalität in Gesellschaften mit successiv eintretenden und ausscheidenden Mitgliedern. Arch. d. Math. u. Phys. v. Grunert, 39. Teil, S. 67 — 92, 1862.

[26] *derselbe:* Mathematische Statistik und deren Anwendung auf Nationalökonomie und Versicherungswissenschaft. Hannover, 1867.

[27] *Heym C.:* Einige Betrachtungen über Sterblichkeit. Masius' Rundschau der Versicherung, Bd. III, S. 335, 1853.

[28] *Burkhardt F.;* Methodische Fragen für die Aufstellung von Sterbetafeln im Anschluss an die deutsche Volkszählung 1925. Deutsches Statistisches Zentralblatt, 21. Jhrg., S. 2 — 10, 1929.

[29] *Eidg. Statistisches Amt:* Ehe, Geburt und Tod während der Jahre 1901 — 1920. Schweiz. Statist. Mitteilungen, X. Jhrg., 4. Heft, 1929.

[30] *Ney M.:* De la mortalité dans la population suisse. Mitt. Schweiz Versicherungsmathematiker, Heft 22, S. 11, 1927.

[31] *Bodenehr W.*: Die Kochersche Sterbetafel und damit zusammenhängende Untersuchungen. Diss. Bern, 1922.

[32] *Gysi W.*: Eine schweizerische Sterbetafel. Zeitschrift Schweiz. Statistik, 3. Jhrg. S. 190 — 203, 1867.

[33] *Eidg. Statistisches Amt*: Schweizerische Statistik LVI, 2. Bd., Bern, 1883,

[34] *Schaertlin G.*: Die Absterbeordnung der schweizerischen Bevölkerung für die Jahre 1876/77 — 1880/81 und 1880/81. Ztschr. Schweiz. Statistik, Jhrg. 1887, S. 330 — 341.

[35] *derselbe*: Die Absterbeordnung der schweizerischen Bevölkerung für die Jahre 1876/77 — 1880/81. Ztschr. Schweiz. Statistik. Jhrg. 1888, S. 283—295.

[36] *Steiner-Stooss H.*: Die Konstruktion der Durrerschen Sterbetafel, Ztschr. Schweiz. Statistik, Jhrg. 1908, S. 530—537.

[37] *Eidg. Statistisches Amt*: Die Ergebnisse der Eidg. Volkszählung vom 1. Dezember 1910, Bd. II, S. 43—72.

[38] *Ballod C.*: Sterblichkeit und Lebensdauer in Preussen. Ztschr. Kgl. Preuss. Stat. Landesamt, 48. Jhrg. 1908, S. 1—61.

[39] *Ney M.*: Détermination de la probabilité de mariage, de divorce et de décès, etc. Mitt. Schweiz. Versicherungsmathematiker, Heft 12, S. 31, 1917.

[40] *Stohler H.*: Die von Prof. Kinkelin aufgestellte Basler Mortalitätstafel. Mitt. Schweiz. Versicherungsmathematiker, Heft 24, S. 1, 1929.

[41] *derselbe*: Basler Sterbetafel nach dem Bevölkerungsstand der Jahre 1918—1924. Ztschr. Schweiz. Statistik, 1926. S. 109—121.

[42] *Grütter W.*: Ueberlebensordnung für die Stadt Bern nach den Resultaten der eidg. Volkszählung vom 1. Dezember 1920 und den Mortalitätsbeobachtungen der Jahre 1919 — 1922. Zeitschrift Schweiz. Statistik, 1924, S. 291—309.

[43] *Völlm E.*: Sterbetafel der Stadt Zürich aus den Jahren 1919—1925. Nicht veröffentlicht. Maschinenschriftl. Exemplar auf dem Statistischen Amt der Stadt Zürich.

Lebenslauf.

Ich bin am 26. Oktober 1904 in Lausanne geboren. In Bern besuchte ich die städtischen Schulen und bestand 1923 die Maturitätsprüfung an der Realschule. An der Universität Bern erwarb ich 1926 das Sekundarlehrerpatent und 1928 das Diplom für das höhere Lehramt. Im Herbst 1928 wurde ich als Adjunkt an das Statistische Amt der Stadt Bern gewählt.

Bern, den 25. Juni 1934.

A. L.